Sujets MATh.EN.JEANS 2009-2010

1. Coloriages des nombres :

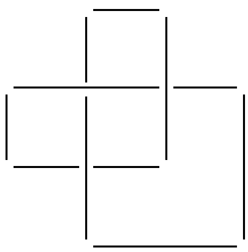
Dans un premier temps, on colorie toutes les fractions $\frac{a}{b}$ en noir et blanc, avec la règle suivante :
– Les fractions $x = \frac{a}{b}$ et $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$ ont la même couleur.
– Les fractions $x = \frac{a}{b}$ et $x + 1$ ont des couleurs différentes.
Si 1 est noir, quelle est la couleur de la fraction $\frac{1\,515}{1\,789}$?
Dans un deuxième temps, on veut décrire toutes les façons possibles de colorier les entiers strictement positifs $1, 2, 3, \ldots$ en noir et blanc, de sorte que la somme de deux entiers de couleurs différentes soit noire, et leur produit soit blanc.

2. Le cube et la fourmi :

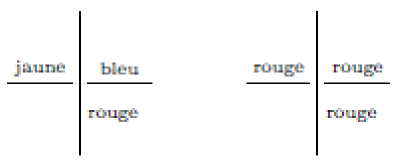
La fourmi, pendant que la cigale chante tout l'été, fait des provisions pour l'hiver. Cette fourmi vivant sur un cube, doit transporter la nourriture, située en un point de la surface du cube, jusqu'à sa fourmilière, située en un autre point de la surface du cube. Pour économiser ses forces, elle voudrait suivre le plus court chemin (en restant à la surface du cube), pour rejoindre sa maison le plus vite possible. Comment aider la fourmi à trouver le plus court chemin jusqu'à sa maison ?

3. Le nœud du problème :

On prend une ficelle, et on fait des nœuds avec celle-ci. Ensuite, on relie les deux extrémités de la ficelle de manière à obtenir une boucle avec plusieurs nœuds dessus. On applique enfin la ficelle sur la table. On représente cette ficelle comme ceci :



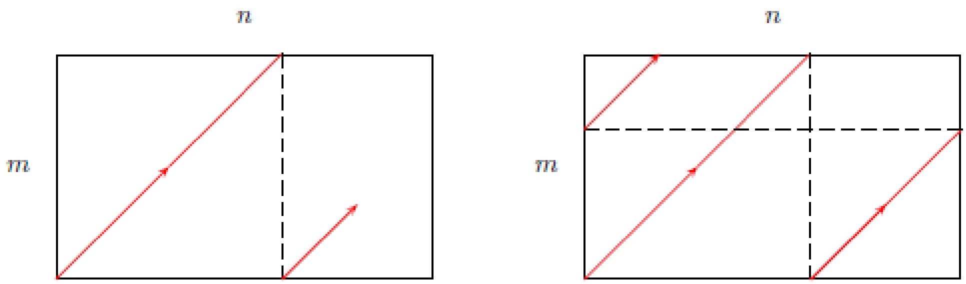
On cherche à colorier les morceaux de cette ficelle (entre deux intersections) avec trois couleurs (rouge, bleu et jaune), de sorte qu'en chaque intersection de la forme suivante, soit les trois couleurs sont différentes, soit elles sont identiques :



Est-ce qu'un tel coloriage est toujours possible (en utilisant au moins deux couleurs différentes) ?
Et si l'on déforme la ficelle (c'est-à dire si on l'applique différemment sur la table), peut-on conserver le coloriage ?

4. Drôles de droites :

On considère un rectangle, dont les côtés ont des longueurs entières. Une fourmi échappée d'un cube se déplace dans le rectangle en respectant les règles suivantes :
– Elle part du coin en bas à gauche du rectangle.
– Elle suit toujours la même direction, inclinée de 45 degrés par rapport à l'horizontale.
– Quand la fourmi arrive sur le côté supérieur du rectangle, elle repart du côté inférieur, à la position horizontale (l'abscisse) où elle était arrivée. Si elle rencontre le côté droit du rectangle, elle repart du côté gauche, à la même hauteur (l'ordonnée). On fait donc comme si le côté droit et le côté gauche étaient confondus.



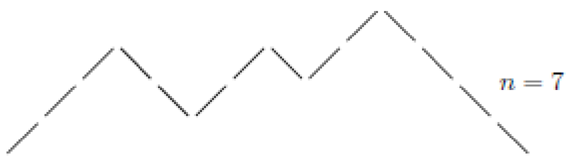
On se demande si la fourmi revient à son point de départ, et si c'est le cas, au bout de combien de temps elle y arrive. On se demande aussi si elle passe ou non par tous les points (à coordonnés entières) de l'intérieur du rectangle. On essaiera également de construire un modèle en papier de ce drôle de rectangle, en collant les côtés droit et gauche ensemble, ainsi que les côtés haut et bas. On étudiera aussi diverses généralisations de ce problème : par exemple, si au lieu de partir d'un rectangle, on part d'un parallélogramme dont les sommets ont des coordonnées entières, ou d'un hexagone dont tous les sommets ont des coordonnées entières et tel que ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

5. <u>À la règle et au compas</u> :

Un élève étourdi se rend à l'école, mais il oublie presque toutes ses affaires. Dans son sac, il n'a qu'une feuille blanche avec un repère dessiné dessus, un crayon, une règle non-graduée et un compas. Le professeur demande à la classe de placer certains points sur l'axe horizontal, par exemple le point d'abscisse $1,25$. Les autres élèves ont une règle graduée, une équerre et beaucoup de matériel pour le faire, mais notre ami n'a que sa règle (non-graduée) et son compas. Il ne sait donc pas comment faire : son seul moyen pour placer un point est d'utiliser sa règle et son compas pour dessiner des droites et des cercles, et les seuls points qu'il obtient sont les points d'intersection entre ces droites et ces cercles. Pouvez-vous l'aider à placer les points que lui demande le professeur ? Par exemple, s'il arrive à placer deux points sur l'axe, dont les abscisses sont x et y, peut-il construire le point d'abscisse $x + y$? et le point d'abscisse $x \times y$? Et s'il arrive à placer un point sur l'axe qui a pour abscisse x, peut-il placer ensuite un point qui a pour abscisse $\frac{1}{x}$? Peut-on deviner tous les points qu'il arrivera à obtenir avec ses outils ? Et le lendemain, l'élève étourdi revient, et cette fois, il a tout oublié, sauf sa feuille et son compas (pas de règle !). Pouvez-vous l'aider à placer les points que lui demande le professeur ?

6. <u>Triangulations de polygones, poignées de mains et dessins de montagne</u> :

- On cherche à découper un polygone convexe (à n côtés) en triangles. On demande que les côtés des triangles soient des côtés du polygone ou des diagonales du polygone (obtenue en reliant deux sommets). C'est ce que l'on appelle une triangulation du polygone. Quel est le nombre de triangulations différentes d'un polygone donné ?
- Si $2n$ personnes sont assisses autour d'une table ronde, combien y a-t-il de façons différentes qu'elles se serrent la main sans que des bras se croisent ?
- Combien de profils de montagne (voir figure) peut-on dessiner avec au total n montées et n descentes ?



Est-ce que les nombres obtenus se ressemblent ? Si oui, peut-on expliquer cette ressemblance ?

7. <u>Chapeaux</u> !

Deux problèmes de chapeaux :
– 100 personnes sont debout en file indienne (l'une derrière l'autre), la dernière regardant toutes les autres, l'avant-dernière regardant toutes les autres, sauf la dernière et elle-même, etc. Chaque personne a un chapeau, qui est soit noir, soit blanc. Aucune des personnes ne connaît la couleur de son propre chapeau. Le but du jeu est le suivant : chaque personne doit deviner la couleur de son propre chapeau, et c'est la dernière qui commence à jouer, puis l'avant-dernière, etc. Les 100 personnes jouent en équipe et cherchent à avoir le maximum de bonnes réponses. Quelle stratégie leur conseillez-vous si chacune des personnes entend les réponses des personnes qui parlent avant elle ? Et si on suppose seulement que chaque personne n'entend que la proposition de la personne précédente, et pas la réponse ?

– Après le jeu précédent, notre équipe de 100 personnes participent à un nouveau jeu, toujours avec des chapeaux : l'organisateur du jeu leur annonce que sur une table de la salle voisine sont placés 100 chapeaux alignés. Sous chaque chapeau se trouve le nom d'une des personnes de l'équipe. Les joueurs vont chacun à leur tour dans la salle, et chacun a le droit de soulever 50 chapeaux. Si le joueur trouve son nom sous l'un des 50 chapeaux qu'il a soulevé, alors ce joueur a gagné et le joueur suivant rentre dans la salle et fait la même chose. L'équipe a gagné si tous les joueurs ont réussi à trouver leur nom. Est-ce que l'équipe a une chance de gagner ? Quelle est la meilleure stratégie pour avoir le maximum de chance de gagner ?

8. Sur un quadrillage :

Si on trace un polygone dont les sommets sont les points d'intersection d'un quadrillage donné, comment peut-on calculer son aire ?

9. Des nombres en forme :

En disposant n pions de manière ordonnée sur une feuille, on peut parfois obtenir une forme usuelle. Quels sont les nombres qui peuvent prendre une forme usuelle (carré, triangle, losange, trapèze, rectangle, disque, etc.) ? De la même manière, en disposant des boules, on peut obtenir des formes usuelles. Quelles sont les nombres qui peuvent ainsi prendre une forme usuelle dans l'espace (cube, parallélépipède, pyramide à base carrée, pyramide à base triangulaire, etc.) ?

10. Une calculatrice exotique :

Ma calculatrice est pour le moins étrange. Les quatre touches des opérations élémentaires $+, -, x\ et \div$ n'existent pas mais il y a une touche exotique $*$. J'introduis le nombre A puis j'appuie sur $*$ et enfin j'introduis B, j'obtiens comme résultat $1-\frac{A}{B}$. Ma calculatrice dispose d'une touche mémoire M et d'une touche de changement de signes $(+/-)$ qui fonctionnent normalement.

Que dois-je faire pour calculer l'expression $\frac{(2\,008+2\,009-2\,010)\times 2\,011}{2\,012}$?

Trouver toutes les touches $*$ permettant de calculer cette expression.