PROPOSITION DE SUJETS POUR MATH.EN.JEANS

Maths et Musique: L'accord des instruments. Dans la musique occidentale, l'échelle des sons est, dans un premier temps, découpée en octaves. Pourquoi l'octave ?

L'octave est l'intervalle le plus pur, le plus neutre à l'oreille. Si deux musiciens jouent le même morceau ensemble, mais à une octave (ou plus) de différence, le résultat sonore sera tout à fait correct. Si par contre ils jouent le même morceau mais à un intervalle différent, le résultat risque fort d'être désastreux...

Pour cette raison, on a l'habitude de nommer deux notes situés à une octave de différence de la même manière: la note située à l'octave d'un Do s'appelle encore Do. Si on veut être plus précis, on rajoute un chiffre: Do(3) est située à une octave plus aigüe que de Do(2).

L'octave s'obtient de la manière la plus naturelle qui soit: tendez une corde et faites-la vibrer quelques instants (essayez sur une guitare). Ensuite bloquez la corde en son milieux et faites vibrer une des deux moitiés de la corde, le son obtenu est situé à une octave au dessus du son précédent: il faut multiplier la fréquence d'une note par 2 pour obtenir la fréquence de la note située à l'octave.

S'il n'y avait que la note Do et ses octaves, la musique serait bien pauvre. Ainsi place t'on 12 notes entre deux Do et ce sur chaque octave: Do, Do #, Ré, Ré #, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La #, Si, Do, Do #, Ré, Ré#, etc...

Les notes sans dièse (#) correspondent aux touches blanches du piano, celles avec un dièse, aux touches noires.

Déterminer la fréquence de ces notes est un problème qui a traversé les siècles et c'est celui que je vous propose cette année.

Une première méthode consiste à reprendre une corde et à la pincer, non plus en son milieu mais, au $\frac{2}{3}$. Le son obtenu en faisant vibrer le plus grand bout de corde qui reste est situé à un intervalle qui s'appelle la quinte.

La quinte de Fa est Do, celle Do est Sol, celle de Sol est Ré... si bien qu'en allant de quinte en quinte on obtient toutes les autres notes (à l'octave près):

Fa->Do->Sol->Ré->La->Mi->Si->Fa#->Do#->Sol#->Ré#->La#

Les quintes formées de cette manière sont très belles, très pures, cependant cette méthode a un énorme "défaut" qu'il vous faudra trouver...

Une fois ce défaut trouvé, à vous de proposer d'autres méthodes (théoriques et pratiques) pour créer votre propre manière de répartir "harmonieusement" ces douzes notes dans une octave.

Si certains d'entre-vous ont des capacités en informatique, on pourra tester vos propositions sur un ordinateur en programmant les fréquences que vous aurez déterminez et faire jouer un morceau par la machine. L'oreille validera alors vos trouvailles !

L'infini. Quoi de plus mystérieux que l'infini ? Dans la vie courante, l'infini désigne souvent quelque chose de très grand ou de très petit, qui dépasse nos capacités d'appréhension. C'est peu de dire que cette notion est floue. Le mathématicien, lui, a besoin de définir précisemment les concepts qu'il manipule, il a donc définit rigoureusement la notion d'ensemble infini:

Un ensemble est infini si il n'est pas fini...

Certes, avec une telle définition, nous n'avons guère progressé...

Qu'est-ce qu'un ensemble fini ?

C'est un ensemble qui a un nombre fini d'éléments:

L'ensemble des nombres entiers compris strictement entre 0 et $3,5$ est fini, c'est l'ensemble $\{1,2,3\}$ qui a trois éléments. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ est fini, c'est l'ensemble $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ qui a deux éléments.

Vous connaissez déjà des ensembles infinis ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,$\mathbb{R}$...) (persuadez-vous qu'ils sont bien infinis avec la définition).

Intuitivement un ensemble infini est un "gros" ensemble, bien plus gros que tous les ensembles finis. Mais que veut dire qu'un ensemble est plus "gros" qu'un autre ?

Si les ensembles sont finis, c'est facile: un ensemble est plus gros qu'un autre s'il a plus d'élements: $\{1,2,3\}$ est plus gros que $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Mais $\{1,2\}$ est aussi gros que $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, ils ont autant d'élements.

Si les ensembles sont infinis, c'est plus dur...

Intuitivement, on pourrait penser que l'ensemble des nombres entiers est plus gros que l'ensemble des nombres pairs, puisque le premier contient le second ?

Et pourtant...

Si j'associe 0 à 0, 1 à 2, 2 à 4, 3 à 6, 4 à 8 etc... j'aurais donc associé chaque entier à un unique nombre pair et chaque nombre pair est associé à un entier. Ces deux ensembles ont donc "autant" d'élements !!!

Autre exemple:

L'ensemble des entiers est aussi gros que l'ensemble des entiers strictement positifs !

Dans ce cas, j'associe 0 à 1, 1 à 2, 2 à 3 etc...

De telles associations s'appellent des bijections

On s'aperçoit qu'il est plus délicat de comparer la "grosseur" des ensembles quand ceux-ci sont infinis. Grâce aux bijections, on pourra néanmoins comparer les ensembles infinis entre eux. Je vous propose cette année, d'essayer de trouver des bijections entre des ensembles très simples (pour commencer, essayez de trouver des bijections entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$, entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, entre $]0,1[$ et $[0,1]$, entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$) , ce qui nécessitera une certaine dose d'imagination dans certains cas et vous fera sentir de manière plus aigüe la notion d'infini, centrale en mathématiques.

Rotations sur le cercle. Imaginons que nous nous déplacions sur un cercle, à chaque pas nous tournons d'un angle α, toujours le même. Si à chaque pas nous notons sur le cercle notre position, le temps avançant, nous voyons le cercle se remplir des points correspondant à tous les sites que nous avons visités. Si l'angle α est de 360 degrés, chaque pas nous fait revenir au même endroit, il n'y a donc qu'un point visité sur le cercle. Si l'angle est de 180 degrés, il y a deux points visités. Le but de cet atelier sera de réfléchir à l'ensemble de points ainsi créé, le choix du nombre α étant bien sûr déterminant.

Le nombre de sites visités est-il fini quelque soit l'angle α ? Comment se répartissent les points sur le cercle, y a t'il des régions favorisées, où l'on passe plus souvent ? On pourra effectuer des simulations sur ordinateur pour mieux appréhender le phénomène.