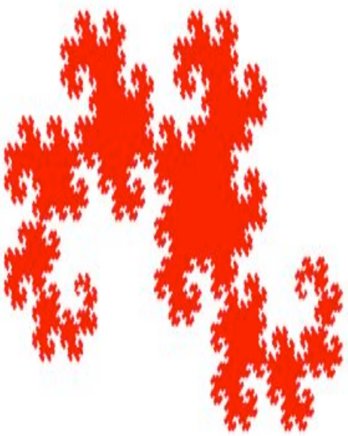
Atelier EXPLORATION MATHEMATIQUE

Systèmes dynamiques

I) Pliages et courbe du dragon



Le point de départ est simple : on plie une feuille en deux, puis encore en deux, puis encore en deux, etc. A la fin on déplie tout et on observe le résultat : une très belle courbe en dents de scie qu'on appelle courbe du dragon.

Dans un premier temps, il s'agit de programme le traçage de cette courbe grâce aux L-systems. Si on code les plis successifs par des 0 et des 1 (suivants qu'ils soient vers la droite ou la gauche), on peut alors étudier la propriété de la suite obtenue.

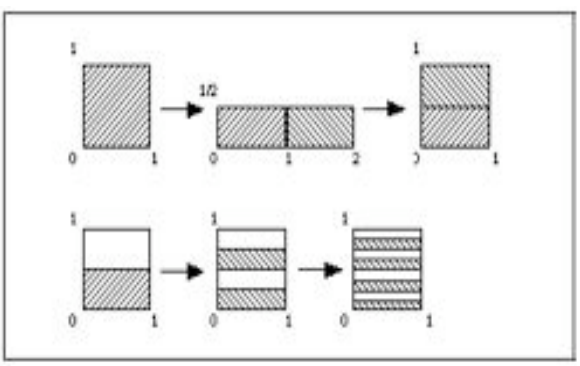
Par ailleurs, on observe que lorsque l'angle de dépliage varie, on obtient des figures très différentes, des courbes, des surfaces qui semblent paver le plan. C'est peut-être l'occasion de comprendre l'influence de cet angle, d'approcher la notion de dimension fractale et d'obtenir des très beaux tracés.

Enfin, une autre possibilité, c'est de voir quel type d'image on obtient lorsqu'on fait un pliage en trois plutôt qu'en deux.

II) IFS et images

Encore un sujet qui permettra de construire de très jolies images, tout en étudiant toutes les possibilités qu'offrent les différentes transformations dont on dispose (et éventuellement en comprenant les mathématiques sous-jacentes). On peut aussi développer une activité destinée aux élèves de primaire afin qu'ils puissent eux aussi construire de ces jolies images.

III) Transformation du boulanger



Le boulanger pétrit un bloc de pâte rectangulaire, il l'aplatit et le replie, en recommençant un grand nombre de fois. Lorsqu'on étudie cette transformation, on se rend compte qu'elle « mélange » très efficacement, puisque deux points très proches se retrouvent très vite éloignés, et il est vite impossible de prévoir leur trajectoire.

En modélisant cette transformation grâce à un codage binaire, on se rend compte qu'elle correspond à un décalage de 0 et de 1. Cette transformation est donc un modèle très général que l'on rencontre dans un grand nombre de systèmes dynamiques. On pourra donc aborder les notions de points fixes, d'orbites, de points-selle, de stabilité.

On peut aussi étudier une version plus simple de cette transformation : le mélange parfait d'un jeu de cartes. Lorsqu'on mélange un jeu de 52 cartes de manière parfaite (en coupant et en alternant une carte de chaque paquet) 8 fois d'affilée, le jeu est de nouveau dans l'ordre de départ !!!! Ceci a des applications intéressantes pour des tours de magie. Mais qu'en est-il si on modifie le nombre de cartes ?

IV) Suite logistique et ensembles de Mandelbrot et Julia (1ère et T^{ale} S)

Le point de départ est ici une suite très simple : $u_{n+1} = k*u_n*(1-u_n)$

Au début, tout est simple, cette suite se comporte de manière prévisible et converge gentiment vers sa limite. Par contre, lorsqu'on fait varier k, les choses se compliquent : le point d'équilibre devient instable, des orbites périodiques apparaissent, de plus en plus longues, de plus en plus nombreuses. Et puis, tout à coup, c'est le chaos qui apparaît, le comportement devient imprévisible.

Ce sujet permet de se familiariser avec les notions fondamentales concernant les systèmes dynamiques. Dans un deuxième temps, on peut comprendre d'où viennent et comment sont construits les célèbres ensembles de Julia et de Mandelbrot.