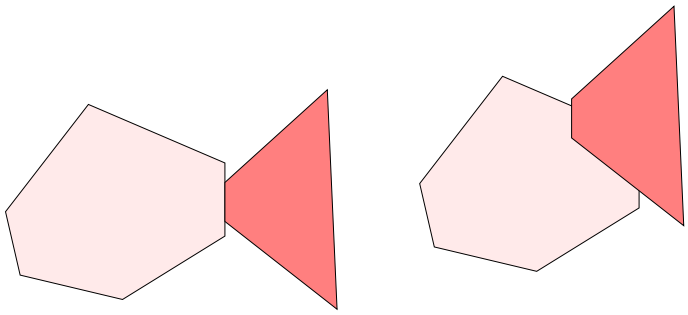
Math en Jeans 2006-2007

Lycées Kastler (Talence) et Condorcet (Bordeaux)

1. Pavages du plan.

Vous êtes nommé responsable du nouveau rayon « polygone » d'une entreprise de pavage-carrelage. Votre première tâche consiste à réaliser votre catalogue, mais le cahier des charges est précis.

Paver une surface, avec des polygones, c'est la recouvrir entièrement de polygones sans vides ni chevauchements. On demande ici que la zone de contact entre deux polygones, si elle n'est pas vide, soit réduite à un sommet ou à une arête.



2 choses interdites

Jusque là, on peut faire ce que l'on veut ou presque. On va donc se donner un certain nombre de contraintes. Guidé par notre sens de l'esthétique on va prendre comme pavés des polygones réguliers. Rappelons que les polygones réguliers, sont les polygones dont tous les côtés sont de même longueur et dont tous les angles sont de même mesure.

Première question, si on se limite à une forme de pavé, a-t-on beaucoup de possibilités ?

C'est un peu maigre comme catalogue. On ne va donc pas se limiter à un type de *pavé* mais à un type de *sommet* (toujours pour la beauté de la chose). Il reste à savoir ce qu'est le type d'un sommet.

On le définit de la façon suivante : on se place en un sommet (de l'un des polygones) du pavage et on fait la liste des polygones qui nous entourent, dans l'ordre où ils apparaissent. Par exemple si vous pavez le plan avec des carrés vous verrez autour de chaque sommet la liste « carré, carré, carré, carré ».

Combien a-t-on maintenant de pavages possibles ? (les plus courageux s'autoriseront deux types de sommets)

Lorsque vous avez obtenu votre catalogue, il est temps penser à la réalisation. Content de vous, vous montrez votre travail. On vous répond : « Très bien, on va faire ça sous forme de plaques toutes identiques à quatre côtés. »Vous faites remarquer que vos pavés ne sont pas tous identiques qu'ils n'ont pas quatres côtés. Réponse : « Proposez aussi les formes les plus petites possibles ».

2. Pavages de la sphère.

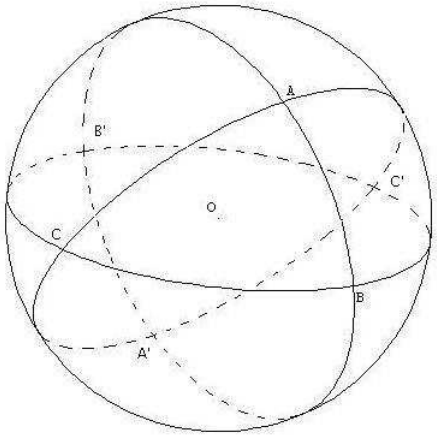
Pavons, toujours avec des polygones réguliers, la sphère. Après tout nous vivons sur une sphère, pourquoi ne pas la carreler ? On va se limiter tout d'abord à un type de pavé. On va se demander quels sont les polygones réguliers qui pavent la sphère. Mais avant toutes choses, il serait bon de savoir quel sens donner à « polygone régulier ». Pour cela on a besoin de points, de droites, de longueur et d'angles. Bref, On doit définir la géométrie de la sphère.

On appelera droite (ou géodésique) les grands cercles de la sphère. Les grands cercles sont les cercles donnés par l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre de la sphère. Ces droites ressemblent-elles à celles du plan ?

On peut maintenant parler de polygone (sphérique), il s'agit des domaines délimités par des segments de droites (c'est-à-dire par des morceaux de grands cercles). Mais comment parler de polygone *régulier* ? Pour cela il faut préciser longueurs et angles. La longueur d'un segment ne pose pas de problème, c'est la longueur usuelle d'un arc de cercle. Si on voit bien sur un dessin que deux grands cercles forment bien un angle, il est pratique de se ramener à des objets mieux manipulable comme les plans. On voit bien que l'angle des deux droites (grands cercles) est déterminé par celui des plans qui les portent.

On ne définit pas complètement une géométrie si on ne donne pas ses « isométries ». Remarquons donc que les rotations autour d'un axe passant par le centre de la sphère ou les symétries par rapport à un plan passant par ce centre (mais aussi la composée des deux) préservent les longueurs, les angles et les aires. Enfin on admettra le théorème d'Archimède affirmant que l'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$. Dorénavant on prendra $R = 1$.

Commençons par nous interesser aux triangles et aux lunules (parties de la sphère délimitées par deux droites). Voici un dessin de triangle sphérique réalisé avec geospace (modulo les pointillés). Combien de triangles sont définis par 3 points ou 3 droites ?



Premier but : connaître les triangles réguliers[1] qui pavent la sphère ?

Quelques petites questions pour se mettre sur la voie.
Motivés par notre intention de paver on va s'interesser surtout aux angles et à l'aire (oui mais pourquoi ?) des triangles sphériques. Pouvez-vous construire un triangle trirectangle (avec 3 angles droits) ? Le triangle est-il particulier ? Quelle est son aire ? Permet-il de paver la sphère ? Et les triangles birectangles ? Mais alors la somme de la mesure des angles d'un triangle ferait-elle ce qu'elle veut ? Tout de même...

[1] on dira triangle régulier plûtot qu'équilatéral car *a priori* ce n'est pas la même chose, mais on peut se demander si ...

3. L'arbre de Stern-Brocot

Quittons la géométrie. Nous allons construire pas à pas une suite de nombres. Partons à l'étape 0 des deux fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ représentant 0 et l'infini. À chaque étape nous intercalons entre deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ la fraction $\frac{m+m'}{n+n'}$ que l'on appellera le médiant de $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$. Ainsi

à l'étape 1, on a la liste $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{0}$,

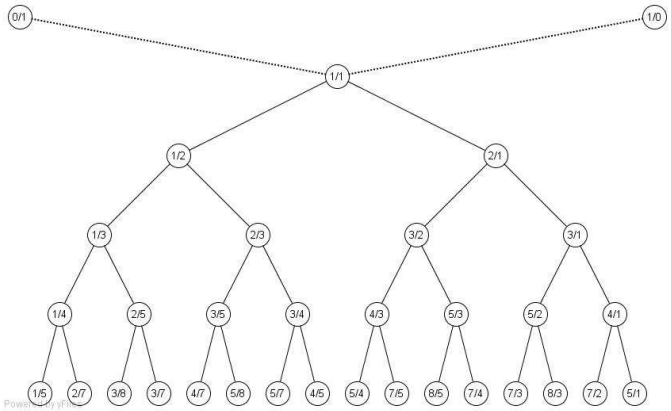
à l'étape 2, on a $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{0}$

Ainsi de suite...

De proche en proche on définit bien une liste de fractions de plus en plus longue. On va présenter cette liste d'une façon assez particulière. Les fractions apparues à l'étape p seront notées sur la ligne p, mais en conservant la répartition horizontale. Ainsi la liste à l'étape 3 s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{0}{1} & & & & & & & & & & \frac{1}{0} \\ & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & & & & \frac{2}{1} & & \\ & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & & \frac{3}{2} & & & \frac{3}{1} & \end{array}$$

Les fractions appararues à l'étape p sont les médiants de deux fractions dont une seule est apparue à l'étape $p-1$ (l'autre pouvant être là depuis l'étape 0). Pour obtenir notre arbre on va relier ces deux fractions. Chaque fraction (à part $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$) est donc reliée à deux fractions. Ce qui donne à l'étape 5 :



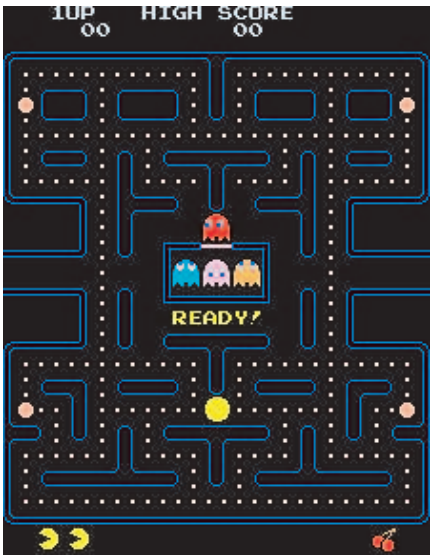
On obtient ce que l'on appelle un arbre. Il porte les noms de Moriz Stern, mathématicien allemand, et d'Achille Brocot, horloger français, qui l'on indépendamment découvert (1858 pour l'un, 1860 pour l'autre).

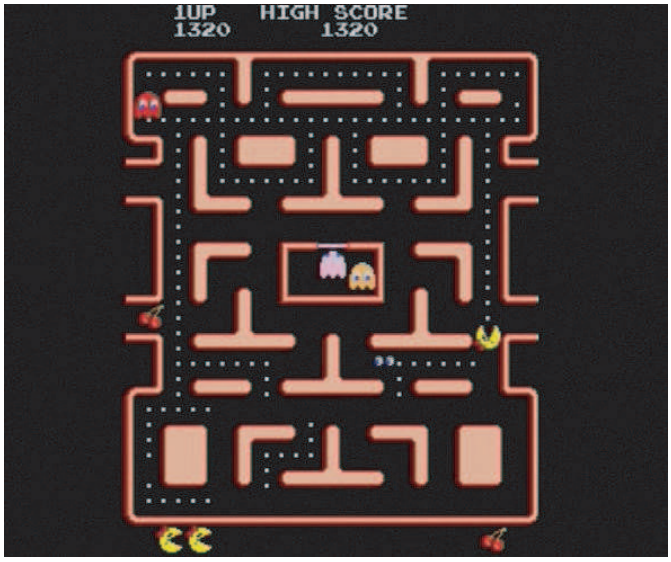
On a envie de savoir quels sont les nombres qui apparaissent sur l'arbre, sous quelles écritures et combien de fois ils apparaissent. Chaque nombre de l'arbre est facilement repéré par une suite de G(auche) et de D(roite) (on part de $\frac{1}{1}$). Par exemple GGD représente le nombre $\frac{2}{5}$. Quel est le « procédé »qui permet de convertir une fraction (apparaissant dans l'arbre) en une suite de G et de D ? (et inversement ?)

Si vous appliquiez ce procédé à un nombre n'appartenant pas à l'arbre, par exemple au nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que se passerait-il ? Qu'obtiendriez-vous ?

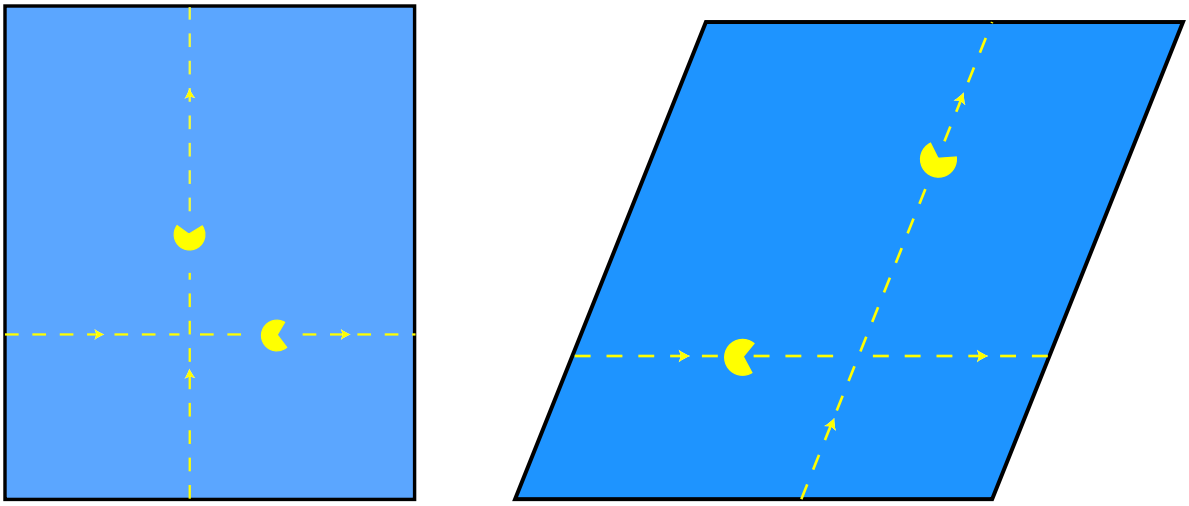
4. Les Pac-Planètes

Vous connaissez sans doute l'être informatique Pac-Man, créé par Iwatani Toru en 1972 au sein de l'entreprise japonaise Namco. Toru a fait vivre Pac-Man dans des mondes bien particuliers appellés *Pac-planètes*. En général, une Pac-planète consiste en un labyrinthe rectangulaire possédant plusieurs sorties (2 ou 4, ou peut-être plus) qu'utilise Pac-Man afin d'échapper aux fantômes (nommés Blinky, Pinky, Inky et Clyde).





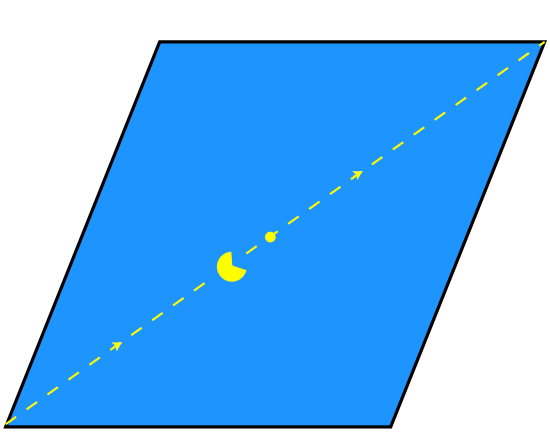
Comme par magie, lorsque Pac-Man emprunte l'une de ces sorties il se retrouve instantanément dans la sortie opposée. On pourrait naturellement se demander ce qui se passerait si le labyrinthe n'était pas entouré d'un mur d'enceinte, la réponse est simple : en sortant du rectangle par un côté Pac-Man rentrerait instantanément dans le rectangle par le côté opposé (voir la figure ci-dessous à gauche). Ce phénomène bien particulier est dû à la forme des Pac-planètes sur lesquelles vivent les Pac-Men, celles-ci ne sont pas des boules.

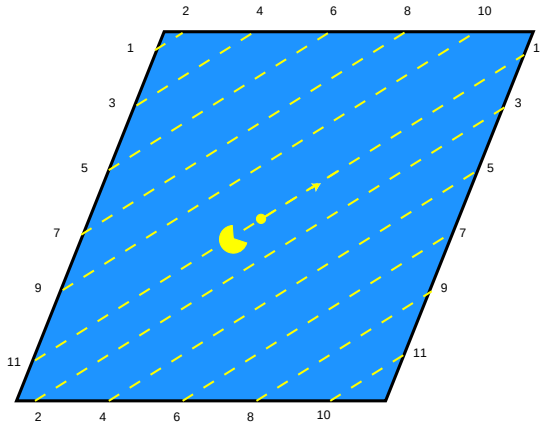


Toru aurait très bien pû créer des Pac-planètes à partir de n'importe quel parallélogramme (voir la figure ci-dessus), il ne fabriqua des Pac-planètes qu'à base de rectangles car les écrans des bornes d'arcades sont eux-mêmes rectangulaires. Nous allons néanmoins nous intéresser à toutes les formes de Pac-planètes possibles, mais en fixant l'aire du parallélogramme.

Pac-Man, en aventurier insatiable, veut réaliser le tour de sa Pac-planète, et il veut que ce Pac-tour-du-monde soit le plus court possible. Nous allons donc nous transformer en Pac-géographes et tenter de lui venir en aide.

Nous allons représenter la Pac-planète de Pac-Man par un parallélogramme quelconque dont on identifie les côtés opposés (si Pac-Man passe par un côté il ressort par le côté opposé). Le point de départ du Pac-tour-du-monde sera le centre du parallélogramme, et Pac-Man parcourra un chemin en ligne droite.





Le premier problème consiste à déterminer toutes les lignes droites qui vont repasser par le centre du parallélogramme, elles correspondront à tous les chemins possibles pour un Pac-tour-du-monde (vous avez deux exemples ci-dessus). Le problème suivant sera de déterminer parmi tous ces chemins lequel est le plus court, de façon à ce que Pac-Man réalise le Pac-tour-du-monde le plus rapide possible. Parmis toutes les Pac-planètes, celle que préfère Pac-man c'est celle dont le plus court Pac-tour-du-monde est le plus long (pourquoi pas le plus court ?). Paradoxal. Ce Pac-monde-meilleur existe-t-il seulement ?