

Sujets pour les clubs de maths, 2006/2007

1 *Le partage des pirates*

Cinq pirates impitoyables mais rationnels, Claude, David, Eric, Fabien et Gaël veulent partager les 1000 diamants qu'ils viennent de dérober. Ils décident de faire chacun leur tour une proposition (dans l'ordre CDEFG) et de voter. Si une majorité absolue est d'accord avec le partage, il est appliqué et chacun repart satisfait. Si le partage est refusé, celui qui a fait la proposition est jeté à la mer, et le pirate suivant sur la liste fait une proposition. En cas d'égalité, on considère que la proposition est refusée.

Précisons également que les pirates trouvent très amusant de jeter leurs (anciens) compagnons à la mer et choisissent toujours cette option si cela ne leur coûte rien.

Quel sera le partage final ? Qui sera jeté à la mer ?

Gaël propose de considérer qu'un vote à égalité n'est pas un refus. Qui sera d'accord avec lui ?

Eric raconte que lors d'une précédente campagne, 100 pirates devant se partager le butin, il fut convenu que l'on utiliserait la même méthode en proposant systématiquement un partage équitable. Trouvera-t-il une majorité pour le soutenir ?

2 *Chasse au trésor*

Alice et Bob participent à une chasse au trésor en duo.

Le trésor est soit à 5 km à l'Ouest du point de départ, soit à 5 km à l'Est. Pour le localiser, ils ont besoin de connaître deux indices (des nombres entre 1 et 2007), l'un se trouvant à quelques kilomètres au Nord et l'autre au Sud : si ces deux nombres sont égaux, alors le trésor est à l'Est. Dans le cas contraire, il est à l'Ouest.

Alice et Bob se séparent donc, trouvent les deux indices puis échangent leurs informations avec le seul instrument autorisé : un talkie-walkie ne permettant de communiquer qu'en morse, et comptant le nombre de signaux échangés. Ils doivent ensuite se rejoindre à l'emplacement du trésor. Le couple gagnant est celui qui trouve le trésor en ayant échangé le moins de signaux.

Avant le départ, chaque couple a pu se concerter sur un protocole de communication. Alice et Bob, bons mathématiciens, ont largement gagné la chasse au trésor. Combien ont-ils échangé de signaux ?

L'année suivante, l'organisateur choisit de placer le trésor à l'Est si et seulement si la somme des deux indices est paire. Alice et Bob mettront-ils plus de temps ?

Et si l'organisateur choisit une règle aléatoire déterminant la position du trésor en fonction des deux indices ?

3 *Un jeu en solitaire ?*

Achille et Hector jouent au jeu suivant : quatre bols rouges et un bol blanc sont disposés en ligne, le bol blanc étant à l'extrémité droite. Les bols rouges contiennent au départ chacun deux grains de riz.

Achille choisit l'un des bols dont on prend tous les grains de riz que l'on répartit (un grain par bol) dans les bols situés à droite (en recommençant à l'extrémité gauche si nécessaire). Si le dernier grain est mis dans un bol rouge vide, c'est à Hector de jouer. S'il est mis dans un bol rouge plein, il vide ce bol en répartissant les grains qu'il contenait comme précédemment. S'il est mis dans le bol blanc, Achille peut choisir un nouveau bol à vider.

Le joueur qui a mis le plus grand nombre de grains de riz dans le bol blanc a gagné.

Est-il possible pour Achille de gagner sans que Hector ait pu jouer ?

Et si l'on prend $2n$ bols rouges contenant chacun n grains de riz, et un bol blanc vide ?

4 *Economies d'énergie*

L'ingénieur Lépine a mis au point un ingénieux système pour économiser l'énergie consommée par les ascenseurs de la tour Montparnasse. Ces ascenseurs sont disposés en cercle, et leur machinerie communique, de telle sorte que la dépense d'énergie est nulle dans le cas suivant : un des ascenseurs part d'un niveau souterrain, au b -ème sous-sol, il monte au b -ème étage alors que ses deux voisins descendent de b étages chacun.

Est-il possible d'effectuer une infinité de mouvements successifs sans dépenser d'énergie ?

5 *Pile ou face*

Anatole lance une pièce non-truquée jusqu'à obtenir deux fois de suite face. Combien de lancers fait-il en moyenne ?

Il décide ensuite de changer et d'attendre d'obtenir "Pile-Face" (dans cet ordre). Cela arrive-t-il plus rapidement ?

Que dire s'il décidait d'attendre d'obtenir "Face-Face-Pile" ?

6 *Billard français*

Devant une table de billard français (billard sans trou ayant deux cotés longs et deux cotés courts), deux champions se proposent une séance d'exercice. L'un donne une séquence de bandes à faire, par exemple : trois courtes, deux longues, une courte et quatre longues. L'autre doit parvenir, en tirant sur une unique boule posée sur le billard, à ce qu'elle tape sur les bandes dans l'ordre annoncé.

- Est-ce que n'importe quelle séquence peut être réalisée par nos champions ?
- Existe-t'il un tir qui contient toutes les séquences ?

– Que donnent d’autres formes de billard ?

7 *Le philosophe et les plantes aquatiques*

Confucius se promenait chaque jour le long d’un étang riche en plantes aquatiques. Le long du bord poussaient des lotus. Curieux de voir à quelle vitesse ils se multiplient, il déposa un jour une cordelette sur le sentier, le long de la rangée de lotus. Le lendemain, il constata que le nombre de lotus avait doublé, ce qu’il vérifia aisément en plaçant bout à bout une seconde cordelette identique à la première. Il tenta la même expérience avec le carré de nénuphars qui poussait au milieu du lac : il déposa sur le chemin une cordelette qui représentait le côté du carré. Le lendemain, il constata avec surprise qu’il fallait placer bout à bout une deuxième cordelette identique à la première pour indiquer le côté du carré de nénuphars. Il en déduisit que le nombre de nénuphars avait quadruplé. Il se demanda alors s’il y aurait une manière de disposer des plantes sur l’étang de sorte qu’en doublant les dimensions de la figure, le nombre de plantes triple. Au bout d’une nuit d’intense réflexion, il trouva une solution, la peignit sur un rouleau de soie qui a malheureusement été perdu depuis. Dans sa grande sagesse, il s’en tint là. Mais qu’est-ce qui nous empêche de chercher une forme qui se multiplie par 2.5, par 1.5, lorsque ses dimensions doublent ?

8 *Perdu en mer*

Un bateau est perdu en mer par un brouillard incroyablement dense, à 10 km d’une côte bien droite. Il ne sait pas dans quelle direction elle se trouve. Si on suppose qu’il contrôle très bien sa direction, quel est le plus court chemin qui permet au bateau de rejoindre la côte ?

9 *Panique sur le tableau électrique*

Un électricien débutant s’est trompé en installant l’éclairage dans une maison neuve. En prenant possession des lieux à la nuit tombée, le propriétaire constate que si on allume la lumière dans un pièce, on change l’état de l’éclairage dans toutes les pièces voisines (d’éteint à allumé et d’allumé à éteint). Il est bien entendu trop tard pour appeler l’électricien. Fou de rage, le propriétaire essaie d’allumer simultanément toutes les pièces, en tripotant sans retenue les interrupteurs. Va t’il parvenir à ses fins ? Est ce que cela dépend de la disposition des pièces ?

10 *Les espions débrouillards*

Deux gentils espions, Julie et Marc, veulent mettre au point un système d’échange de messages électroniques complètement sûr, malgré un système de brouillage mis en place par le méchant Hilarion.

Les messages de Julie et Marc sont cryptés pour envoi électronique en des suites de chiffres 0 ou 1, de longueur k . Hilarion, qui intercepte tous les messages, mais ne peut pas les décrypter, décide de les brouiller de la manière suivante : chaque fois

qu'il intercepte un message, il choisit de manière aléatoire p chiffres de ce messages, et en remplace les 0 par des 1 et les 1 par des 0.

Julie et Marc décident d'abord de rajouter à la fin de chaque message 0 si la somme de tous ses chiffres est paire, et 1 sinon. Mais ils s'aperçoivent que cela n'est pas suffisant pour pouvoir récupérer à coup sûr le message original à partir du message brouillé. Ils décident alors de prendre plusieurs paquets de chiffres d'un message, et pour chacun d'entre eux, de rajouter 0 ou 1 à la suite, suivant que la somme des chiffres du paquet est paire ou impaire. Arriveront-ils ainsi à débrouiller leurs messages ? Pourront-ils optimiser leurs résultats ?

11 *Patrons*

Nous savons tous réaliser un patron de cube : c'est un polygone plan en forme de croix, on le découpe, on colle les arêtes deux à deux, cela donne un cube. On peut modifier les longueurs des arêtes, dans ce cas, le polyèdre obtenu n'est plus un cube, ses facettes sont la plupart du temps des triangles.

- Peut-on deviner en contemplant le patron où se trouveront les plis qui deviendront des arêtes de ce polyèdre ?
- Quels sont les polyèdres qui admettent un patron convexe ?
- Quels sont les patrons qui donnent un polyèdre tout plat ?

12 *En un seul coup de ciseaux*

Je plie une feuille de papier en quatre, puis je coupe l'angle d'un coup de ciseaux : j'ai fait un trou un forme de losange.

- Quels sont les polygones qui peuvent être ainsi découpés dans du papier d'un seul coup de ciseaux ?
- Si j'autorise les découpes rasantes, i.e. les ciseaux passent exactement le long du pli, est-ce que je peux découper davantage de polygones ?

13 *La fin des de la Brie*

Au Xème siècle, le comte de la Brie s'inquiète pour sa descendance. Depuis d'innombrables générations, la tradition veut que chaque de la Brie ait exactement trois enfants (filles ou garçons). La famille est très croyante et envoie certains de ses membres dans un monastère. Le jour de la naissance d'un enfant, la mère lance une pièce de monnaie. En cas de pile, il devra entrer dans un monastère, sinon il fondera une famille pour perpétuer la tradition. Sachant qu'à l'époque, une femme prenait toujours le nom de son mari, le comte se demande si son nom s'éteindra un jour où s'il a des chances de se perpétuer indéfiniment. Que se passera-t'il si le comte décide d'interdire à ses descendants d'entrer au monastère ?

Auteurs : Sylvain A., Pierre B., Antoine G., Pierre P., Frédéric P., Nicolas V.