

Sujets MATH en JEANS 2005-2006

Christine VANNIER, Juliette VENEL

21 septembre 2005

1 Comment arrêter la fuite ?

A la compagnie des eaux de Plucraisses, un ingénieur s'est aperçu que la quantité d'eau prélevée dans la rivière, ne correspondait pas à l'eau qui arrivait au bassin de stockage. Une perte non négligeable, par ces temps de sécheresse, avait donc lieu pendant le trajet. Ceci inquiéta le maire, qui à côté du bassin, déclara : "Vous devez arrêter cette fuite de toute urgence". L'ingénieur réfléchit : "Le problème, c'est que l'eau peut emprunter de nombreux chemins pour arriver jusqu'ici". Connaissant les nombreuses canalisations qui mènent de la rivière au bassin, pouvez-vous aider l'ingénieur à trouver une solution ?

2 Disparition d'un nom de famille

Il y a quelque temps, le nom de famille était le nom du père... Monsieur Secténope, en contemplant des photos de famille, vit son grand-père enfant entouré de ses parents, ses arrière-grands-parents qu'il n'a, malheureusement pas pu connaître. Il songea alors à sa propre descendance : "Faites que notre nom ne disparaisse pas!". A votre avis, à chaque génération, combien de garçons doivent naître, en moyenne pour que le nom Secténope traverse les siècles ?

3 Fabrication de bijoux de perles

Anne aime confectionner des bijoux en perles : pas cher et toujours original. Aujourd'hui, elle n'a plus que 4 perles bleues, 3 perles blanches, 2 perles oranges et un fil circulaire. A peine, de quoi faire un bracelet pour une poupée, pense-t-elle, en plus, je n'ai pas beaucoup de choix avec si peu de perles. A-t-elle raison ? Combien de bracelets différents peut-elle faire avec ce matériel ? Trouver une méthode générale, si ensuite, elle désire fabriquer un collier pour elle, très coloré.

4 Pile ou Face

Pierre et Paul joue à pile ou face. Pierre lance une pièce de monnaie, supposée équilibrée, et Paul essaie de deviner le résultat. S'il réussit, Pierre lui donne un euro, s'il échoue, il donne un euro à Pierre.

Après un grand nombre de lancers, Paul est en tête et depuis longtemps sa chance ne semble pas vouloir l'abandonner. Pierre souhaite alors arrêter. Que feriez-vous à sa place ?

5 La faillite du capitaine Haddock ?

Capitaine Haddock, pêcheur de son état, cherche à comprendre pourquoi les sardines sont de moins en moins nombreuses dans l'Océan Pacifique. Les requins, très présents dans cette région, en feraient-ils leurs repas favoris ? Quels conseils donneriez-vous au Capitaine Haddock ? Revendre son bateau de pêche tout de suite ou attendre des jours meilleurs ?

Proposer pour cela un modèle représentant l'évolution de ces deux espèces en notant $x(t)$ le nombre de sardines en fonction du temps dans la région de pêche du Capitaine Haddock et $y(t)$ le nombre de requins.

6 Comment tricher sans se faire prendre

Deux élèves Fred et Max cherchent à échanger des informations durant une interrogation de mathématiques. Ils utilisent pour cela la méthode de codage RSA afin que, même repérés, personne ne comprenne leurs messages. Les deux élèves ont choisi deux grands nombres premiers p et q puis calculé les produits $n = pq$ et $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$. Ils ont ensuite choisi un entier r inférieur à $\varphi(n)$ et premier à $\varphi(n)$ puis calculé un entier s tel que :

$$rs \equiv 1[\varphi(n)]$$

Les nombres n et r peuvent être connus de tous, tandis que les nombres p , q , $\varphi(n)$ et s sont gardés secrets par Fred et Max.

Les messages sont représentés par des entiers, l'application de cryptage d'un message m est :

$$c(m) \equiv m^r[n]$$

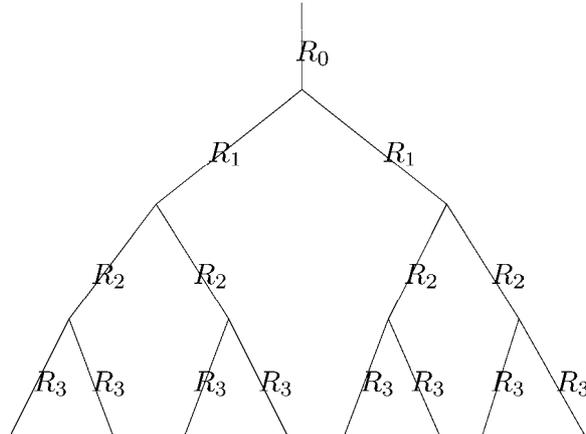
Celle de décryptage est :

$$d(m') \equiv (m')^s[\varphi(n)]$$

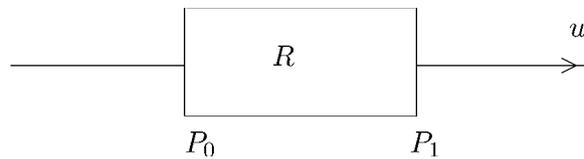
Pourquoi Fred et Max peuvent-ils se comprendre ? Pourquoi à votre avis est-il difficile pour une autre personne de comprendre leur message ? On pourra ensuite imiter Fred et Max.

7 Etude d'une crise d'asthme

On cherche à mieux comprendre les mécanismes d'une crise d'asthme. Pour cela, on commence par modéliser le poumon par l'arbre suivant :



Chaque bronche est caractérisée par une résistance R , résistance qui permet de relier la pression P_i en chaque extrémité de la bronche au flux d'air u qui la traverse :



$$P_0 - P_1 = Ru \text{ [Loi d'Ohm]}$$

Dans le poumon sain, les résistances sont constantes par génération. Par ailleurs, une crise d'asthme correspond à une diminution du diamètre de certaines bronches, ce qui revient à modifier des résistances.

On cherchera dans un premier temps à donner une relation entre la pression et le flux d'air à la sortie du poumon (on imposera pour cela une pression nulle en entrée du poumon). Ensuite on calculera les quantités d'air totales sortantes du poumon sain et malade afin de les comparer.