I. Le jeu de Marienbad

Le jeu des allumettes se joue à deux ; le but est d'enlever la dernière allumette selon les règles suivantes :

- Au début, on dispose de plusieurs tas d'allumettes ; le nombre et la taille de chacun des tas est décidée d'un commun accord, imposé par un arbitre ou choisie au hasard, peu importe.
- Chacun à son tour, les deux joueurs peuvent enlever autant d'allumettes qu'il le désire (éventuellement toutes) dans le tas de son choix

Quand il y a un seul tas, c'est facile : il suffit d'enlever toutes les allumettes.
Quand il y a deux tas de même taille, le deuxième joueur peut « copier » le premier : il choisit le tas que n'a pas choisi le premier et enlève autant d'allumettes que celui-ci : il est assuré d'avoir toujours un coup à jouer et donc ne peut pas perdre. Au contraire, quand les deux tas sont de tailles différentes, le premier joueur enlève ce qu'il faut pour que les deux tailles deviennent égales puis « copie » le deuxième joueur.
Pour trois tas, ça commence à devenir intéressant. Le plus souvent, le premier joueur gagne, sauf dans certaines situations particulières. Formellement, on posera $a \oplus b = c$ si, en ajoutant un tas de taille c à deux tas de taille a et b, on aboutit à une situation où le second joueur gagne (et le premier perd). On peut se convaincre facilement que :

- $A \oplus B = B \oplus A, \ A \oplus A = 0$
- *Si* $A \oplus B = C$ alors $A \oplus C = B$ et $B \oplus C = A$

Par contre, il n'est pas évident que $a \oplus b$ soit une opération bien définie, c'est à dire qu'il existe toujours une valeur et une seule c qui convienne. Le but est justement de calculer $a \oplus b$ en fonction de a et b, en utilisant à la fois les propriétés formelles de l'opération $\oplus$ et l'interprétation en terme de jeu.

Remarque : ce jeu a été déjà été proposé à la sagacité de mathématiciens en jeans il y a quelques années, de façon beaucoup moins formelle. Il peut être judicieux de partir des résultats déjà trouvés.

II. Les tours de Ventiane

Dans le casse-tête dit « des tours de Hanoï », il s'agit de déplacer un certain nombre d'anneaux enfilés par tailles décroissantes (le plus grand en bas) d'un piquet de départ à un piquet d'arrivée en passant par un piquet intermédiaire, avec les règles suivantes :

- On ne peut déplacer qu'un anneau à la fois ; tous les anneaux (sauf celui en cours de déplacement) doivent être enfilé sur un des piquets
- On ne peut pas poser un anneau sur un autre anneau plus petit

On montre alors qu'il faut $2^n - 1$ mouvements pour déplacer n anneaux , en complétant le raisonnement suivant :

1) Il faudra bien déplacer le plus grand anneau
2) Pour cela il faut déplacer tous les anneaux qui sont au-dessus (n-1) vers le piquet intermédiaire, puis déplacer le grand anneau du piquet de départ au piquet d'arrivée
3) Pour terminer il faut déplacer n-1 anneaux du piquet intermédiaire au piquet d'arrivée

On pourra chercher des résultats plus détaillés dans les annales de Math en Jeans

Dans le casse-tête des tours de Ventiane, le principe est le même, sauf que l'on dispose de deux piquets intermédiaires. Combien faut-il de déplacements pour *100* anneaux ?