Annexe 4 — L'harmonium à deux dimensions

Thème d'atelier court proposé à l'université d'été afin d'initier à la démarche de recherche.

Le sujet proposé *[sur une idée originale de Jean-Pierre Bourguignon]*

• Le point de départ de la recherche est la donnée d'un quadrillage dans le plan dans lequel on délimite une région en inscrivant des nombres entiers (positifs) sur des cases qui ont soit un côté en commun, soit un sommet en commun et qui en forment le bord.

(L'exemple d'une région carrée 6×6 fut traité lors de l'université d'été)

Il s'agit ensuite de remplir les cases intérieures par des nombres entiers en appliquant les règles suivantes :

— on met dans chaque case au départ la valeur la plus petite prise sur une case du bord ;
— ensuite, on peut augmenter la valeur dans une case donnée en veillant à ce que la valeur que l'on inscrit ne dépasse jamais la *moyenne des valeurs* dans les quatre cases adjacentes;
— on s'arrête lorsque aucune des valeurs attribuées aux cases ne peut être modifiée sans violer la prescription.

L'information précieuse est alors la donnée de toutes les valeurs obtenues dans le domaine.

• Parmi les phénomènes à observer :

— dépendance ou indépendance du processus de modification des valeurs ;
— dépendance des valeurs données sur le bord ;
— dépendance de la forme du domaine ;
— comportement lorsqu'on remplace le quadrillage par un quadrillage plus raffiné (par exemple en divisant chaque carré en quatre carrés) ;
— comparaison des valeurs à l'intérieur et des valeurs au bord ;
— etc.

Quelques informations sur l'actualité du thème *[texte de Pierre Duchet]*

Avertissement — Cette réponse documentée à des questions qui m'ont été posées lors de l'atelier ne saurait illustrer l'esprit et le style de MATh.en.JEANS que le lecteur voudra bien retrouver dans la plupart des références indiquées.

Le sujet[1] propose un modèle discret du "problème de Dirichlet" en invitant à en tirer éventuellement une méthode de résolution approchée. Une telle idée remonte à Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), qui fonde sa théorie de la chaleur (1822) sur l'unique hypothèse que la chaleur ne se communique qu'entre particules contiguës, de la plus chaude vers la plus froide. À ce principe, Fourier adjoint la loi de Newton : la vitesse de l'échange est proportionnelle à la différence des températures. Il en déduit ce qui restera un exemple standard d'équation aux dérivées partielles de type elliptique, la fameuse *équation de la chaleur* qui gouverne la répartition des températures dans un corps homogène sans source interne de chaleur. En régime stationnaire, l'équation devient *l'équation de Laplace* :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

En approchant dans le plan les solutions de (1) par des sommes de fonctions périodiques simples, Fourier inaugura une méthode d'une extraordinaire fécondité[2] , permettant en particulier d'analyser un son comme superposition de sons sinusoïdaux dont les fréquences sont les harmoniques d'une fréquence fondamentale. De nos jours, les fonctions réelles de deux variables satisfaisant l'équation de Laplace sont appelées les *fonctions harmoniques*[3] .

C'est Peter Fustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) qui prouva la convergence des méthodes de Fourier. *Le problème de Dirichlet* (relèvant actuellement de la *théorie du potentiel*), consiste donc à trouver une fonction harmonique dans un domaine ouvert U du plan dont la restriction au bord de U soit une fonction donnée ϕ. De nombreux phénomènes physiques se modélisent sous cette forme

[1] Le sujet fut cherché en 1992-93 par des lycéens : voir leur article dans les *Actes MATh.en.JEANS*, 1993, pp. 191-222.

[2] Voir par exemple *Ondes et ondelettes* (prix d'Alembert 1996) de Barbara Burke Hubbard, Belin 1995.

[3] Les fonctions harmoniques dans un ouvert U du plan complexe sont précisément les parties réelles des *fonctions holomorphes* dans U (ou *fonctions analytiques* dans U).

(températures dans un conducteur, potentiel électrique, tensions d'une membrane élastique, écoulement fluide en régime stationnaire…) et plusieurs méthodes de résolution sont connues : transformations conformes et méthode de Joukovski (à une certaine approximation, le calcul d'un écoulement incompressible autour d'une aile se ramène à un problème de représentation conforme[4]) ; analogie rhéoélectrique (voir ci-dessous), analogie hydrodynamique de Hele-Shaw entre l'écoulement plan des liquides parfaits et celui des liquides visqueux, etc.

Les fonctions numériques définies sur les nœuds d'un réseau plan (ici un morceau de quadrillage) qui vérifient la *propriété de la moyenne* (i.e. pour tout nœud intérieur p, f(p) est la moyenne des valeurs voisines) peuvent être appelées *préharmoniques*[5] : ces fonctions sont les analogues discrets des fonctions harmoniques dont elles peuvent constituer (sous certaines conditions) des approximations.

Un lien intéressant avec la théorie des probabilités[6]

Considérons un quadrillage du plan et déterminons un parcours sur ce quadrillage en tirant au sort la direction prise à chaque sommet, chacune des quatre directions ayant une chance égale. On a ainsi une image du mouvement brownien à deux dimensions. Soit $P(x,y)$ la probabilité pour que le chemin passe par un point du quadrillage de coordonnées (x,y). On a donc :

$$P(x,y) = \frac{1}{4}\ [P(x-1,y) + P(x+1,y) + P(x,y-1) + P(x,y+1)]$$

Si on fait tendre vers 0 la maille du quadrillage, on voit que la fonction $P(x,y)$ satisfait à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

P est une fonction harmonique. Cette "démonstration heuristique" établit un lien entre le calcul des probabilités et la théorie du potentiel.

Plus précisément, considérons un contour fermé Γ, composé de deux arcs γ_1 et γ_2, et plaçons-nous en un point intérieur (x_0,y_0). Quelle est la probabilité pour qu'un parcours "au hasard" (déterminé comme ci-dessus) franchisse la frontière Γ sur l'arc γ_1 ? D'après ce que nous venons de voir, cette probabilité devra être la valeur d'une fonction harmonique à l'intérieur de Γ qui prendra la valeur 1 sur γ_1 et la valeur 0 sur γ_2. On est donc ramené à résoudre un problème de Dirichlet particulier[7].

Ce lien entre théorie du potentiel et calcul des probabilités est à la base de certaines méthodes dites "de Monte-Carlo" qui permettent la résolution approchée du problème de Dirichlet. Étant donné un quadrillage, il est facile de simuler une promenade au hasard au moyen de contacts électriques déclenchés aléatoirement. On peut donc dénombrer, et par suite évaluer, la fréquence des parcours issus de M et sortant de G sur g_1. D'après ce que nous venons de voir, c'est la valeur en M d'une fonction harmonique prenant la valeur 1 sur g_1 et la valeur 0 sur g_2 ; ou, plus exactement, c'est l'estimation de cette valeur, d'autant plus précise aléatoirement que le nombre d'expériences sera plus grand. Une fonction continue sur G peut être approchée par paliers, c'est-à-dire par des combinaisons linéaires de fonctions égales à 1 sur des arcs tels que g_1 et à 0 sur des arcs tels que g_2. La valeur de la fonction harmonique en M sera donc approchée par les mêmes combinaisons linéaires des fréquences correspondantes de sortie. Ces méthodes sont très couramment utilisées.

---

[4] Une application différentiable du plan dans lui-même est *conforme* en p_0 si sa différentielle en p_0 conserve les angles orientés (autrement dit l'application linéaire tangente est une similitude directe). Il en résulte que les fonctions conformes dans un ouvert U sont holomorphes dans U ; inversement toute fonction holomorphe dans U, dont la dérivée ne s'annule pas, est conforme en tout point de U. Les bijections conformes d'un domaine du plan complexe vers un autre sont les *représentations conformes*, couramment utilisées en cartographie.

[5] Terme utilisé par G. Bouligand, Équations aux dérivées partielles, livre V, in E. Lainé, *Précis d'Analyse Mathématique*, Vuibert 1949, pp. 209-314.

[6] On trouvera un exposé très accessible dans l'article de Claude Dellacherie : Pascal et Fermatt, la naissance du calcul des probabilités, *Actes MATh.en.JEANS* 1994, pp. 207-214.

[7] La valeur $P(x_0,y_0)$ est ce que l'on nomme, en théorie des fonctions, la *mesure de Nevanlinna* de l'arc γ_1 sur le contour Γ, relative au point (x_0,y_0).