

## 2

## Un cube fantôme

situations-recherche ( $\geq 8$  séances)  
situations-problème 6 séances  
travaux dirigés (collège)  
étude dirigée, exercices (Lycée)  
TIPE (Classes préparatoires)

## Objectifs

Organisation d'une réflexion vaste et argumentative sur un problème ouvert qui paraît pourtant très accessible. Mise en oeuvre de cadres et de procédures indépendantes.

Développement de la perception d'objets mathématiques dans l'espace (ex. : notion d'ombre).

Mise en oeuvre de techniques fondamentales : preuve, usage de transformations géométriques, utilisation de nombres complexes, extremum d'une fonction, ((calcul des variations, courbure de surfaces)).

## Prérequis

cube, droite, point, physique élémentaire de la lumière. + ((surface, fonctions et dérivation, aires courbes))

## Concepts en jeu

ensemble, transformation géométrique, direction, plan, angle, bord, surface, tangente, connexité, convexité, mesure, distance, ((différentielles, intégrales)).

## Notions problématiques

notions élémentaires de géométrie dans l'espace, perspective, Thalès, contour apparent, séparatrice ombre-lumière, transformations (projections, applications affines), paramétrisation d'une fonction (cf. [3]), inégalité triangulaire, cosinus, aires, ((aire d'une surface, équations différentielles et intégrales)).

## Aides possibles

- Vision d'un corps comme intersection des volumes cylindriques basés sur ses ombres.
- Mise au point sur la lumière et sur l'ombre (projection parallèle vs projection radiale; ombre orthogonale et ombres obliques)
- Rôle de la convexité (points *exposés*), de la connexité.
- Corrélation 2D— 3D. Identification des ombres possibles du cube (+ notion de transformation affine).
- Discussion du cas 2 dimensionnel du triangle (point de Toricelli, cf. fiche [3])
- Le cas du tétraèdre est-il plus simple ?
- Utilisation systématique de certaines caractéristiques de la solution pour 3 points pour le cas des polygones.
- Comment mesurer une aire courbe ?
- Quelle est la forme et l'aire maximale de l'ombre d'un cube obtenu par projection orthogonale ?



- [3] Points à relier.
- [4] Rencontre à moindre coût
- [7] Perspective



- Optique géométrique en physique.
- Littérature : thème de l'ombre.
- Activité vidéo sur les ombres, scénarios
- Technologie: réalisation d'une sculpture minimale ayant l'ombre d'un cube.



**Point de Toricelli - Fermat d'un triangle**  
voir fiche [2A]



**OMBRES, PUIITS, DISTANCE**



*distance, surface.*



Cube. Utilisation possible de l'ordinateur comme instrument de mesure des distances.



[1] Yvonne et René Sortais, *La Géométrie du Triangle*, Hermann, Paris, 1987.

[2] Ian Stewart, Pour la Science.

[3] Surfaces minimales dans Les mathématiques C. Mauduit, P. Tchanitchian, Belin, Paris 1993. (?)

[4] D. Hoffman, W.H. Meeks, Les surfaces minimales ; la caténoïde par les deux bouts, [trad. de l'américain par Line Audin], Quadrature n° 5, 1990, pp. 31-47.



Surfaces minimales.

## Déroulement

La modélisation mathématique de l'ombre (comme ensemble de droites orientées, par exemple) est riche d'enseignements. Le rapprochement des point de vue perspectifs et projectifs (contour apparent vs contour projeté) est troublant.

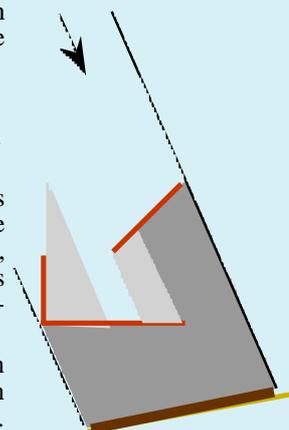
Les pistes possibles suggérées aux élèves sont très indépendantes. L'approche par le calcul différentiel et intégral suppose des prérequis de classes préparatoires. Une recherche de la notion d'aire courbe est intéressante en lycée. La mise à plat du problème, expérimentée en collège (**OMBRES**) s'avère fructueuse.

En utilisation pédagogique, le plus intéressant nous semble être le mélange pertinent de cadres différents (géométrique, topologique, logique, numérique, analytique). On verra par exemple dans **PUIITS** la découverte du cosinus comme moyen pertinent de mesure d'un angle et une mise en oeuvre en collège de l'étude graphique d'une fonction.

Ni existence ni unicité  
✱ d'une solution optimale  
ne sont assurés.

Les propriétés topologiques de ce que l'on cherche (dimension, mesurabilité, connexité) ne sont pas claires : le champ d'investigation doit être délimité.

On donne ci-contre un exemple de leurre non connexe d'un carré.



## Construction des ombres d'un cube.

Après la mise en place de principes de perspective cavalière (cf. [7]), il s'agit d'engendrer systématiquement les formes possibles de l'ombre.

La mise en évidence *automatique* de ces formes, ou (ce qui revient au même !) du contour apparent d'un cube, suppose, plus fondamentalement, la construction de l'enveloppe convexe de quatre points. La mise au point, délicate, de "Cabri-constructions" où les objets finaux sont les sommets de cette enveloppe (les points intérieurs n'apparaissant plus) est un problème logico-géométrique digne d'intérêt.