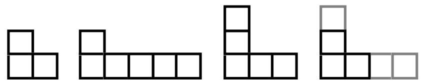
les pavages

par Malvina Boutot, Emilie Deljehier, Caroline Eslan, Carine Giraudot, Sigrid Herstain, Dorothée Loedt, Sabrina Provence, Alexandra Touchais,
Yann Van Den Bussche, Pascal Wierepant, élèves de 1°S1 du lycée Jules Ferry de Coulommiers (77)

enseignante : Sandrine Lefranc

chercheur : Olivier Bodini

Le but de notre recherche est de remplir des rectangles à l'aide de “ *L* ” sans trou ni chevauchement, les formes appelées “ *L* ” étant représentées par :



Nous allons définir les différents “ *L* ” permettant de remplir un rectangle, puis établir la liste des rectangles pavables en fonction de leur aire.

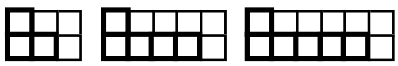
les* “ *L* ” *permettant de remplir un rectangle

Proposition 1 : Les “ *L* ” ayant au moins un côté de longueur 2 unités peuvent paver des rectangles.

Démonstration. Soit x la base la plus longue du “ *L* ”, l'autre côté a, par hypothèse, une longueur de 2 unités. En les plaçant tête-bêche on peut construire un rectangle de longueur $(x + 1)$ et de largeur 2.

On peut donc avec ce type de “ *L* ” former des rectangles de taille $(2k\ ;\ (x + 1)l)$ avec k et l des entiers naturels non nuls.

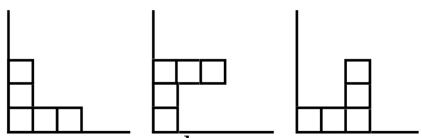
Exemples de rectangles pavables :



Proposition 2 : Les “ *L* ” ayant leurs deux côtés égaux à trois unités ne permettent pas le pavage de rectangle.

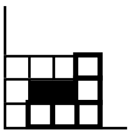
Démonstration. Dans chaque exemple que nous fournirons, les carreaux gris représentent les parties non pavées. La case (i, j) représente la case située dans la $i^{\text{ème}}$ colonne, à la $j^{\text{ème}}$ ligne.

Commençons par paver la case (1, 1) par des “ *L* ” roses ; il y a 3 cas possibles, les deux derniers, b et c revenant au même par symétrie :



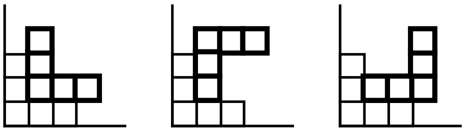
a *b* *c*

Etudions le cas b : essayons de paver la case (2, 1) : il n'y a qu'un seul cas possible, qui débouche sur un trou non pavable, en noir.



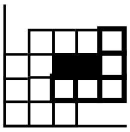
Le cas c se traite comme le cas b, par symétrie.

Etudions maintenant le cas a : essayons de paver la case (2, 2) en noir ; 3 cas se présentent.



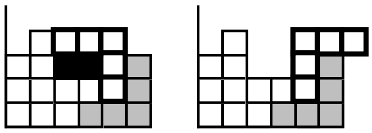
a_1 a_2 a_3

Pour le cas a_2, pavons la case (3, 2) : une seule possibilité, qui conduit à deux cases non pavées.



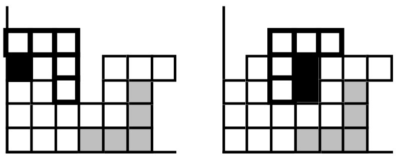
Le cas a_3 se résout de la même manière par symétrie en essayant de paver la case (2, 3).

Etudions le cas a_1 : pavons la case (4, 1) (une seule possibilité, en gris) puis la case (5, 2)



a_{11} a_{12}

(deux cas). Le cas a_{11} aboutit à deux cases non pavables. Poursuivons le cas a_{12} en pavant la case (3, 3) :



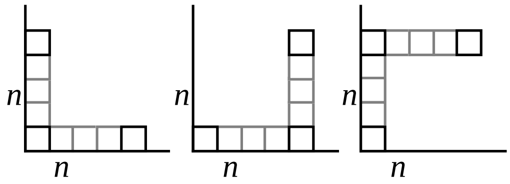
on aboutit à des cases non pavables.

Tous les cas possibles ont été étudiés, la démonstration est terminée.

Proposition 3 : Les “ L ” ayant leurs deux côtés égaux à n unités ne permettent pas le pavage de rectangle $n \times 3$.

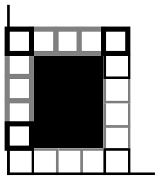
Démonstration. On refait une démonstration dans le même esprit que la précédente.

Essayons tout d'abord de paver la case (1, 1) :

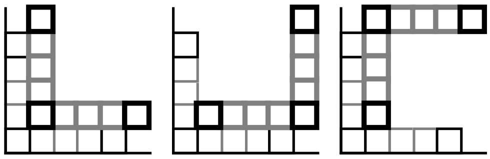


Les deuxièmes et troisièmes cas sont équivalents par symétrie.

Etudions le deuxième cas et essayons maintenant de paver la case (1, 2) : il n'y a qu'un cas possible qui conduit à une impossibilité de paver les cases noires.

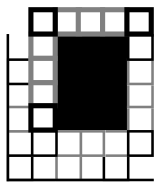


Regardons maintenant le premier cas en pavant la case (2, 2).

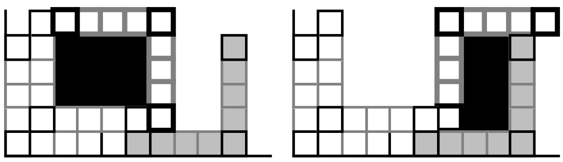


De nouveau les deuxième et troisième cas sont équivalents par symétrie.

Le deuxième cas donne lieu à la figure ci-contre en pavant la case (2, 3).



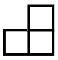
Le premier cas donne lieu à deux cas en pavant la case (n + 1, 1) puis la case (n + 2, 2).



On a étudié tous les cas possibles qui se sont révélés à chaque fois impavables.

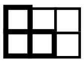
les rectangles pavables, d'après leur aire

Etudions maintenant les aires des rectangles qui peuvent être pavés entièrement, sans trou ni chevauchement, par des " *L* " de la forme :



Proposition 4 : Les rectangles dont l'aire peut s'écrire sous la forme : $3k \times 2k'$, avec k et k' des entiers naturels non nuls, sont pavables.

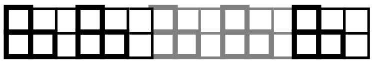
Démonstration. Prenons un rectangle simple :



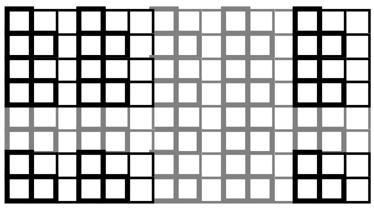
Appelons sa longueur a et sa largeur b, alors l'aire de ce rectangle est :

$$A = a \times b = 3 \times 2.$$

On constate que si l'on reproduit ce même rectangle k fois, en les plaçant côte à côte, on obtient de nouveau un rectangle dont l'aire s'exprime par : $A = 3k \times 2$, et dont la représentation graphique est la suivante :



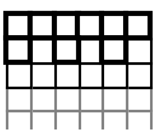
Mais nous pouvons également multiplier k' fois ce rectangle, en les plaçant les uns en dessous des autres, de cette façon :



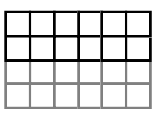
L'aire ainsi obtenue est $A = 3k \times 2k'$.

Proposition 5 : Les rectangles dont l'aire peut s'écrire sous la forme $A = 6k \times k'$, avec $k' \geq 2$ et k, k' des entiers naturels non nuls, sont pavables.

Démonstration. Avec les formes choisies, nous pouvons former des rectangles de taille $6 \times 3k$ et $6 \times 2k'$ où k et k' sont des entiers naturels non nuls.



et



En les mettant bout à bout verticalement puis horizontalement, on peut créer des rectangles de taille $6n(3k + 2k')$, k, k', n entiers naturels.

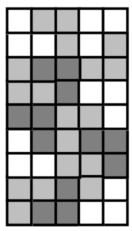
Or tout nombre entier naturel x supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme $3k + 2k'$. En effet :

- si x est pair, il s'écrit $2k'$ de manière évidente ;
- si x est impair, $x–3$ est pair donc $x - 3 = 2k'$ d'où $x = 3 + 2k'$.

Donc, on peut construire tout rectangle de taille $6\,n \times x$.

Proposition 6 : Les rectangles dont l'aire peut s'écrire sous la forme $9k \times 5k'$, avec k et k' des entiers naturels non nuls, sont pavables.

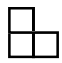
Démonstration.



En reportant ce rectangle 5×9, on peut créer les rectangles donnés dans la proposition.

Bilan.

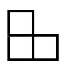
Les rectangles appartenant aux familles suivantes sont pavables ; c'est-à-dire qu'ils peuvent être comblés sans trou, ni chevauchement, grâce à des " *L* " de la forme :



- $3k \times 2k'$
- $6k \times k'$
- $9k \times 5k'$

Nous pouvons également établir un tableau, nous permettant de résumer les rectangles pavables en fonction de l'unité choisie pour la longueur et la largeur.

Ce tableau n'est valable que pour les " *L* " de la forme :



Nous avons en abscisse la largeur et en ordonnée la longueur.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	X	X	O	X	X	O	X	X	O
3	X	O	X	O	X	O	X	O	X
4	X	X	O	X	X	O	X	X	O
5	X	X	X	X	X	O	X	X	O
6	X	O	O	O	O	O	O	O	O
7	X	X	X	X	X	O	X	X	X
8	X	X	O	X	X	O	X	X	O
9	X	O	X	O	O	O	X	O	X

X : représente les solutions impossibles à paver.
O : représente les solutions possibles.

Exemple de lecture du tableau :

Prenons, en abscisse, la largeur 8 ; et en ordonnée la longueur 6. Ce rectangle est pavable car son aire A s'écrit sous la forme : $3k \times 2k'$; avec $k = 2$ et $k' = 4$. La représentation graphique de ce rectangle est :