les entiers naturels qui sont sommes de deux carrés

par Alhamide Haki du lycée George Sand, Le Mée sur Seine (77), Deniz Bugday, Sébastien Bazabas et Samir Bentahar du lycée Romain Rolland, Argenteuil (95)

enseignantes : Sabine Giros, Dominique Guy et Joëlle Rhodes

chercheur : Loïc Allys

lycée Romain Rolland d'Argenteuil (95) — ***nombres sommes de carrés***

Recherche des nombres entiers naturels n tels que l'équation $x^2 + y^2 = n$ admette des solutions entières. Quelles sont les propriétés de tels nombres ? Combien existe-t-il de solutions pour un nombre n donné ?

SUJET :

Est-ce que tout nombre entier peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux carrés ?

Quels sont les nombres n tels que $n = a^2 + b^2$, avec a et b des entiers naturels ?

Démarche :

Nous avons commencé par faire la liste des nombres de 0 à 99 qui sont somme de deux carrés [NDLC. Voir l'annexe, page 26].

Remarques :

• Certains nombres peuvent s'écrire de deux façons : $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2$
$50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$
$125 = 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$

• Solutions triviales : tout carré parfait (nombre qui s'écrit sous la forme $P^2 + 0^2$) ainsi que le nombre qui le suit (qui s'écrit sous la forme $P^2 + 1^2$) sont solutions du problème.

Exemple : $25 = 5^2 + 0^2$ et $26 = 5^2 + 1^2$

• Nous n'avons pas trouvé de loi qui nous permette de déterminer les nombres n. En vertu de cela, on a cherché à étudier quelques propriétés de ces nombres, comme la multiplication, l'addition et la parité.

Produit : Si deux nombres sont sommes de deux carrés, alors leur produit est somme de deux carrés.

Démonstration. Si $N = a^2 + b^2$ et $P = c^2 + d^2$
alors $N \times P = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
$= a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2$
$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + 2abcd$
$= (a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2b^2 - 2abcd + b^2c^2)$

et : $N \times P = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

Exemples :

• $5 = 2^2 + 1^2$ et $13 = 3^2 + 2^2$ alors $5 \times 13 = 65$ et $65 = 8^2 + 1^2$,

• $9 = 3^2 + 1^2$ et $13 = 3^2 + 2^2$ alors $9 \times 13 = 117$ et $117 = 9^2 + 6^2$.

Conséquence.

Soit un entier naturel z. **Si les facteurs premiers dont z est le produit sont tous sommes de deux carrés, alors z est aussi somme de deux carrés.**

Somme : La somme de deux nombres somme de deux carrés n'est pas forcément somme de deux carrés.

Exemple : $(1^2 + 1^2) + (2^2 + 1^2) = 7$, or 7 n'est pas somme de deux carrés [comme on peut le vérifier facilement].

La parité.

Le cas des nombres pairs :

Si N est pair et s'écrit sous la forme d'une somme de deux carrés alors $N/2$ s'écrit sous la forme d'une somme de deux carrés.

Démonstration. Soit $N = 2\,p$ et $N = a^2 + b^2$ avec $a \geq b$, alors ;

$$p = \frac{N}{2} = \frac{(a^2 + b^2)}{2}$$
$$= \frac{(a^2 + 2\,a\,b + b^2)}{4} + \frac{(a^2 - 2\,a\,b + b^2)}{4}$$
$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

et donc $N/2$ est somme de deux carrés. [NDLR : a^2 et a ont la même parité, de même que b^2 et b ; a et b ont donc la même parité : ils ne peuvent être l'un pair et l'autre impair, sinon a^2 et b^2 seraient l'un pair et l'autre impair et N serait impair ; donc $a + b$ et $a - b$ sont pairs.]

Exemple : $N = 34 = 25 + 9 = 5^2 + 3^2$. On divise 34 par 2 et on obtient :

$$17 = \left(\frac{5-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5+3}{2}\right)^2 = 1^2 + 4^2$$

Conséquence :

Pour savoir si un nombre pair n est somme de deux carrés, on se ramène au nombre impair n_0 tel que $n = 2^p\, n_0$.

Conclusion :

Il reste à savoir comment écrire un nombre impair sous la forme d'une somme de deux carrés.

Le cas des nombres impairs :

On cherche donc maintenant à écrire un nombre impair, sous la forme d'une somme de deux carrés.

Un nombre impair est la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair. Si a^2 est un nombre pair et b^2 un nombre impair, nécessairement a est pair et b est impair. Soit $a = 2\,K$ et $b = 2\,K' + 1$. On a donc :

$$a^2 + b^2 = (2\,K)^2 + (2\,K' + 1)^2$$
$$= 4\,K^2 + 4\,K'^2 + 4\,K + 1$$
$$= 4\,(K^2 + K'^2 + K) + 1$$
$$= 4\,K'' + 1$$

Conclusion :

Si un nombre impair est somme de deux carrés, alors il est de la forme $4\,K + 1$.

Exemple :

$$13 = 3^2 + 2^2$$
$$= (2 \times 1)^2 + (2 \times 1 + 1)^2$$
$$= 4\,(1^2 + 1^2 + 1) + 1$$
$$= 4 \times 3 + 1$$

La réciproque est fausse : en effet si un nombre est de la forme $4\,K + 1$, il n'est pas forcement somme de deux carrés.

Contre-exemple : $21 = 4 \times 5 + 1$ ne s'écrit pas sous la forme de deux carrés.

Conséquence :

Si un nombre impair s'écrit sous la forme $4\,K + 3$, alors il ne peut pas être somme de deux carrés.

La démarche suivante a été de démontrer que **si un nombre somme de deux carrés est multiple de 3 alors il est multiple de 9.**

Démonstration.

Soient $N = a^2 + b^2$ et $N = 3n$. Dans la division par 3 de a et b, les restes possibles sont 0, 1 ou 2. On écrit a sous la forme $3x$ ou $3x + 1$ ou $3x + 2$ et b sous la forme $3y$ ou $3y + 1$ ou $3y + 2$. On a envisagé tous les cas possibles :

I) $N = (3x)^2 + (3y)^2 = 9\,(x^2 + y^2)$.
N est un multiple de 3 et aussi un multiple de 9.

II) $N = (3x)^2 + (3y+1)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 2y] + 1$
N n'est alors pas multiple de 3.

III) $N = (3x)^2 + (3y+2)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 4y + 1] + 1$
Idem.

IV) $N = (3x+1)^2 + (3y)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 2x] + 1$
Idem.

V) $N = (3x+2)^2 + (3y)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 4x + 1] + 1$
Idem.

VI) $N = (3x+1)^2 + (3y+1)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 2x + 2y] + 2$
Idem. [NDLR : restent encore trois cas :]

VII) $N = (3x+1)^2 + (3y+2)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 2x + 4y] + 5$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 2x + 4y + 1] + 2$

VIII) $N = (3x+2)^2 + (3y+1)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 4x + 2y] + 5$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 4x + 2y + 1] + 2$

IX) $N = (3x+2)^2 + (3y+2)^2$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 4x + 4y] + 8$
$= 3[3(x^2 + y^2) + 4x + 4y + 2] + 2$

On obtient un multiple de 3 seulement dans le premier cas et alors c'est aussi un multiple de 9.

Généralisation : Si N, somme de deux carrés, est multiple de $4k+3$ alors N est multiple de $(4k+3)^2$.

Démonstration. Soit $N = (4k+3)\,P$ et $N = X^2 + Y^2$. Posons $X = (4k+3)a + \alpha$ et $Y = (4k+3)b + \beta$ avec α et β inférieurs à $4k+3$. Alors :

$N = [(4k+3)a + \alpha]^2 + [(4k+3)b + \beta]^2$
$= [(4k+3)a]^2 + 2(4k+3)a\alpha + \alpha^2$
$+ [(4k+3)b]^2 + 2(4k+3)b\beta + \beta^2$
$= (4k+3)\,[(4k+3)a^2 + 2a\alpha + (4k+3)b^2 + 2b\beta]$
$+ \alpha^2 + \beta^2$

Or $\alpha^2 + \beta^2$ est une somme de deux carrés et $4k+3$ ne peut donc pas diviser $\alpha^2 + \beta^2$. Ainsi $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et donc $\alpha = \beta = 0$ soit $X = (4k+3)a$ et $Y = (4k+3)b$ et donc $N = (4k+3)^2\,(a^2 + b^2)$.

Conséquence. Si un nombre, somme de deux carrés X^2 et Y^2 est multiple de $(4k+3)$ alors X et Y le sont aussi.

Conclusion. Pour un nombre N donné, on décompose N en facteurs premiers : $N = p_1\, p_2 \dots p_n$.

Si $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont sommes de deux carrés, alors N aussi (d'après les résultats sur le produit, page 23).

Si des nombres p_i ne sont pas somme de deux carrés, alors, il faut qu'ils apparaissent 2, 4, 6 ou $2n$ fois pour que N soit somme de deux carrés.

[NDLC. On trouvera page suivante l'annexe annoncée, donnant une table de décomposition des 100 premiers entiers.]

ANNEXE

n	$\boldsymbol{a^2+b^2}$	***n***	$\boldsymbol{a^2+b^2}$
0	0^2+0^2	50	5^2+5^2
1	0^2+1^2	51	--------
2	1^2+1^2	52	5^2+4^2
3	--------	53	7^2+2^2
4	2^2+0^2	54	--------
5	1^2+2^2	55	--------
6	--------	56	--------
7	--------	57	--------
8	2^2+2^2	58	7^2+3^2
9	3^2+0^2	59	--------
10	1^2+9^2	60	--------
11	--------	61	6^2+5^2
12	--------	62	--------
13	2^2+3^2	63	--------
14	--------	64	8^2+0^2
15	--------	65	8^2+1^2
16	4^2+0^2	66	--------
17	4^2+1^2	67	--------
18	3^2+3^2	68	8^2+2^2
19	--------	69	--------
20	4^2+2^2	70	--------
21	--------	71	--------
22	--------	72	6^2+6^2
23	---------	73	8^2+3^2
24	--------	74	--------
25	5^2+0^2	75	--------
26	5^2+1^2	76	--------
27	--------	77	--------
28	--------	78	--------
29	5^2+2^2	79	--------
30	--------	80	8^2+4^2
31	--------	81	9^2+0^2
32	4^2+4^2	82	9^2+1^2
33	--------	83	--------
34	5^2+3^2	84	--------
35	--------	85	--------
36	6^2+0^2	86	--------
37	6^2+1^2	87	--------
38	--------	88	--------
39	--------	89	5^2+8^2
40	6^2+2^2	90	9^2+3^2
41	4^2+5^2	91	--------
42	--------	92	--------
43	--------	93	--------
44	--------	94	--------
45	6^2+3^2	95	--------
46	--------	96	--------
47	--------	97	4^2+9^2
48	--------	98	7^2+7^2
49	7^2+0^2	99	-------