la suite de Conway

par ??? , DEUG A, 1ère année, Université d'Aix-Marseille 2

enseignant : Laurent Beddou

chercheur : Christian Mauduit

— suite de Conway
Etude de la suite de Conway : $u_1 = 1$, $u_2 = 11$, $u_3 = 21$, $u_4 = 1211$, $u_n = ?$

Avant toute chose, notons que l'on appelle *suite* toute application de N dans un ensemble. Une suite est dite *récurrente* si chacun de ses termes (sauf le premier ou les premiers) est obtenu comme image du précédent ou des précédents, par une fonction. [On dit de l'entier n qu'il est le rang du $n$ème terme.] *La suite de Conway est une suite récurrente,* définie par $L_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 1, L_{n+1} est la *lecture* de L_n. [NDLC : voir l'article précédent.]

L_1 1
L_2 11
L_3 21
L_4 1211
L_5 111221
L_6 312211
L_7 13112221
L_8 1113213211
L_9 31131211131221
L_{10} 13211311123113112211
…

Voici maintenant la quinzième ligne. Elle comporte déjà 78 chiffres : 311311222113111 231131112132112311321322112111312211312111322212311322113212221. Ce que nous laisse supposer cette ligne peut être démontré (par récurrence et par l'absurde), à savoir : *La suite de Conway est composée exclusivement des chiffres 1, 2 et 3.* [Au lecteur, donc, de le prouver !]

Autres manières de construire la suite de Conway.

Une dérivation particulière

A la ligne L_n, toute séquence de chiffres identiques peut être remplacée par le chiffre qui la compose suivi de leur nombre, ce dernier étant placé en exposant. Pour trouver la ligne L_{n+1}, il suffit alors de "*dériver*" [de manière symbolique] toutes ces nouvelles séquences.

L_1 1^1
L_2 1^2
L_3 $2^1 \quad 1^1$
L_4 $1^1 \quad 2^1 \quad 1^2$
… [NDLR. Ainsi, de x^a on passe à ax^{a-1}, puis on simplifie $x^p x^q$ en x^{p+q}, en supprimant les termes de la forme x^0.]

Un *automate*

Nous appellerons *simplet* tout caractère à la fois précédé et suivi d'un caractère différent [ou du vide], sur une ligne donnée de la suite de Conway. Nous appellerons *doublet* toute série de deux caractères analogues, à la fois précédée et suivie d'un caractère différent [ou du vide], sur une ligne donnée de la suite de Conway. Enfin, nous appellerons *triplet* toute série de trois caractères analogues, à la fois précédée et suivie d'un caractère différent [ou du vide], sur une ligne donnée de la suite de Conway.

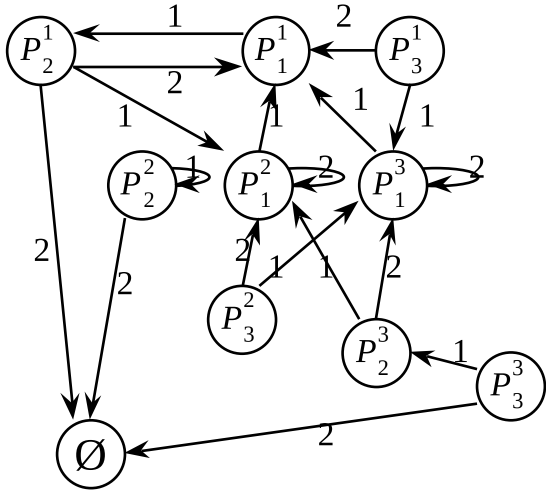
On note $P_k^i(n)$ un k-uplet de i au rang n, où k et i sont des entiers appartenant à l'intervalle [1 ; 3].

A titre d'exemple, $P_2^3\ (n)$ est un doublet de 3 au rang n, c'est-à-dire la séquence : 33. On a ainsi :

$$P_1^1\,(n) \to P_2^1\,(n{+}1)$$
$$P_3^1\,(n) \to P_1^3\,(n{+}1)\ P_1^1\,(n{+}1)$$
$$P_1^2\,(n) \to P_1^1\,(n{+}1)\ P_1^2\,(n{+}1)$$
$$P_3^2\,(n) \to P_1^3\,(n{+}1)\ P_1^2\,(n{+}1)$$
$$P_1^3\,(n) \to P_1^1\,(n{+}1)\ P_1^3\,(n{+}1)$$
$$P_3^3\,(n) \to P_2^3\,(n{+}1)$$
$$P_2^1\,(n) \to P_1^2\,(n{+}1)\ P_1^1\,(n{+}1)$$
$$P_2^2\,(n) \to P_2^2\,(n{+}1)$$
$$P_2^3\,(n) \to P_1^2\,(n{+}1)\ P_1^3\,(n{+}1)$$

Pour reprendre l'exemple précédent, un doublet de 3 au rang n va donner $P_1^2(n{+}1)P_1^3(n{+}1)$, c'est-à-dire un simplet de 2 et un simplet de 3 au rang n+1, ou encore la séquence : 23.

On peut alors construire l'automate qui décrit la formation de la suite de Conway. [NDLR. Il ne s'agit pas ici d'un automate au sens usuel du terme, mais d'un graphe décrivant la lecture : chaque « sommet » étiqueté P_k^i donne naissance à une suite de deux autres sommets qui sont, dans l'ordre, les extrémités des flèches numérotées 1 et 2, partant de P_k^i.]



On peut de même établir des règles de simplification :

$$P_2^i(n)\ P_1^i(n) = P_3^i(n)$$
$$P_1^i(n)\ P_1^i(n) = P_2^i(n)$$

On peut ainsi retrouver la structure de la suite de Conway :

L_1 1
P_1^1

L_2 11
P_2^1

L_3 21
$P_1^2\ P_1^1$

L_4 1211
$P_1^1\ P_1^2\ P_2^1$

L_5 111221
$P_2^1\ P_1^1\ P_1^2\ P_1^2\ P_1^1 = P_3^1\ P_2^2\ P_1^1$

L_6 312211
$P_1^3\ P_1^1\ P_2^2\ P_2^1$

L_7 13112221
$P_1^1\ P_1^3\ P_2^1\ P_2^2\ P_1^2\ P_1^1 = P_1^1\ P_1^3\ P_2^1\ P_3^2\ P_1^1$

L_8 1113213211
$P_3^1\ P_1^3\ P_1^2\ P_1^1\ P_1^3\ P_1^2\ P_2^1$

L_9 31131211131221
$P_1^3\ P_2^1\ P_1^3\ P_1^1\ P_1^2\ P_3^1\ P_1^3\ P_1^1\ P_2^2\ P_1^1$

L_{10} 13211311123113112211
$P_1^1\ P_1^3\ P_1^2\ P_2^1\ P_1^3\ P_3^1\ P_1^2\ P_1^3\ P_2^1\ P_1^3\ P_2^1\ P_2^2\ P_2^1$

...

Notons maintenant que l'on peut démontrer (par l'absurde) que *la séquence …333… n'apparaît pas dans la suite de Conway.* [En effet, la séquence P_3^3 n'est l'aboutissement d'aucune flèche ni d'aucune simplification, et la séquence P_2^3 ne peut provenir que de P_3^3 …]

Principales propriétés de la suite de Conway

Il est nécessaire d'établir une distinction entre les différents chiffres d'une ligne donnée de la suite de Conway. Ainsi, nous appellerons *compteur* tout caractère qui occupe une position *impaire* sur une ligne donnée de la suite considérée, par rapport à la ligne précédente. Nous appellerons *valeur* tout caractère qui occupe une position *paire* sur une ligne donnée de la suite considérée, par rapport à la ligne précédente.

• *x* étant une valeur et *y* et *z* des compteurs, on ne trouvera jamais la séquence …*yxzx*… **dans une des lignes de la suite considérée.**

On le démontre très rapidement, par l'absurde : supposons que l'on trouve dans une ligne quelconque la séquence …*yxzx*… . A la ligne précédente, il y avait donc

$$\ldots \underbrace{x\ldots x}_{y \text{ fois}}\,\underbrace{x\ldots x}_{z \text{ fois}} \ldots$$

Par conséquent, à la ligne considérée, nous aurions dû avoir …$(y + z)x$… . Il y a donc contradiction.

Cette propriété, de même que les définitions qui la précèdent, servent de base à beaucoup de démonstrations.

• les lignes L_n de la suite de Conway, avec n strictement supérieur à 1, contiennent un nombre de caractères C_n pair.

Soient C_n le nombre de caractère d'une ligne donnée, T_n le nombre de triplets, D_n le nombre de doublets et S_n le nombre de simplets. On a :

$$C_1 = 1 \text{ et :}$$
$$n > 0,\ C_{n+1} = 2\,(T_n + D_n + S_n)$$

En effet : $C_n = 3\,T_n + 2\,D_n + S_n$ et nous avons vu que tout triplet, doublet ou simplet au rang n donne un doublet ou deux simplets, c'est-à-dire 2 chiffres, au rang $n + 1$.

• les lignes de la suite de Conway contiennent au plus $2n - 1$ chiffres.

(démonstration par récurrence.)

• les lignes de rang pair se terminent par la séquence 11 et les lignes de rang impair par la séquence 21.

(démonstration par récurrence)

• On peut encore énoncer une propriété plus générale selon laquelle **les lignes d'une suite construite selon les mêmes principes que ceux de la suite de Conway, et dont le terme initial est *a* (où *a* est un chiffre quelconque), se terminent par ce chiffre *a*.**

Soit L_n (i) le ième caractère d'une ligne de rang n. Il est possible de calculer le nombre de chiffres d'une ligne donnée :

$$C_n = \sum_{i=0}^{i=(C_{n+1}-2)/2} L_{n+1}\,(2\,i + 1)$$
$$= L_{n+1}(1) + L_{n+1}(3) + \ldots + L_{n+1}(C_{n+1} - 1)$$

De même, la somme des chiffres d'une ligne donnée est :

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=C_{n-1}} L_n\,(i + 1)$$
$$= L_n\,(1) + L_n\,(2) + \ldots + L_n\,(C_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{i=(C_{n+1}-2)/2} L_{n+1}\,(2i{+}1) \times L_{n+1}\,(2i{+}2)$$
$$= [L_{n+1}(1) \times L_{n+1}(2)]$$
$$+ \ldots$$
$$+ [L_{n+1}(C_{n+1} - 1) \times L_{n+1}(C_{n+1})]$$

• la suite C_n est croissante.

(démonstration par l'absurde)

Etude informatique.

Nous avons utilisé pour ce faire le langage de programmation Turbo Pascal et le logiciel Excel.

Si on reprend l'exemple de la ligne 15, elle comprend 78 chiffres répartis comme suit : 39 chiffres 1 (soit 50 %), 24 chiffres 2 (soit 31 %) et 15 chiffres 3 (soit 19 %). **Ces pourcentages sont applicables à toutes les lignes de la suite que nous avons pu étudier.** (Nous nous sommes arrêtés à la ligne 57 qui nécessita déjà une nuit de travail à l'ordinateur, cette ligne comportant 5 724 486 chiffres !!!)

Il est intéressant d'étudier la progression de la courbe représentant le nombre de chiffres en fonction du rang.

[La fonction logarithme népérien et sa réciproque, la fonction exponentielle, sont sur les calculatrices. Leurs abréviations respectives sont *ln* et *exp*.]

On remarque que la première courbe, travée avec une échelle semi-logarithmique, est proche d'une droite d'équation $y = a\,x + b$.

On peut prendre pour a :

$$a = [ln(5724486) – ln(134)]/(57-17)$$
$$a \approx 0{,}266$$

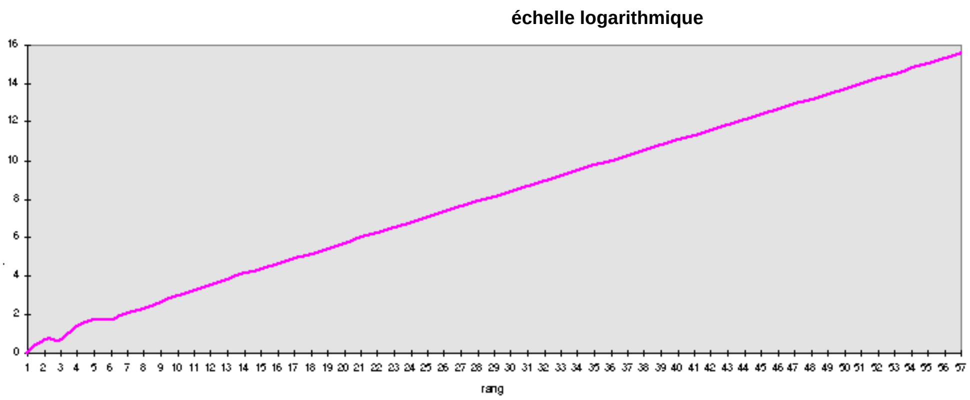
De même, l'ordonnée à l'origine, b, sera :

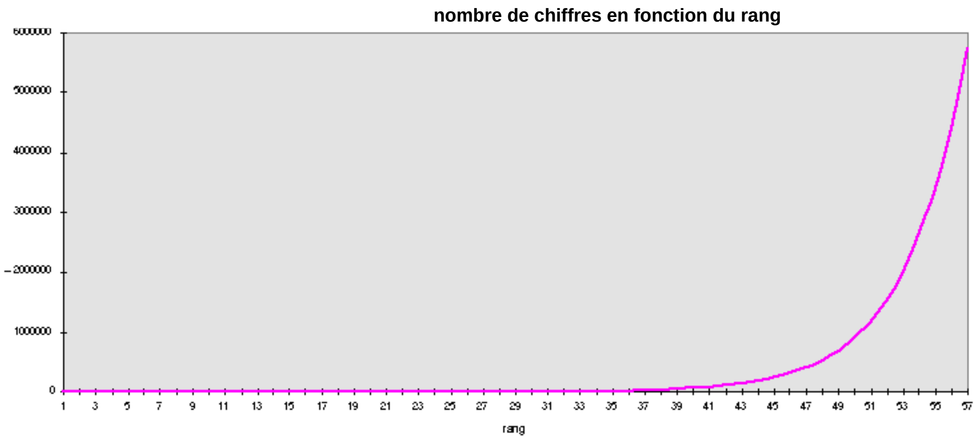
$$b = ln(9898) – 0{,}266 \times 33$$
$$b \approx 0{,}422$$

En passant à une échelle normale, on peut trouver une approximation de l'équation de la seconde courbe :

$$y = e^{0{,}266x\,+\,0{,}422}$$
$$y = 1{,}525 \times 1{,}305^{x}\,.$$

C'est, comme nous le laissait supposer le tracé, l'équation d'une *exponentielle*. [NDLR. Resterait à savoir si cette loi apparente s'étend au delà de la ligne 57 … !]





Observations.

Certaines séquences ont une propriété particulière, que l'on peut nommer *propriété de stabilité*. En effet, il est possible de faire *évoluer séparément* deux parties de la séquence pour les réunir ensuite, sans que la lecture de la suite en soit modifiée. Par exemple, observons la séquence qui suit :

112	111
2112	31
122112	1311
11222112	111321
21322112	31131211

Nous pourrions démontrer que la première partie se terminera toujours par un 2 (par récurrence) et que la seconde ne commencera jamais par ce chiffre (phénomène périodique).

[NDLR. Il serait intéressant de savoir si la suite de Conway peut se scinder de cette manière ou non ; en particulier, la séquence 112111 apparaît-elle quelque part ?]

On peut encore noter que certaines séquences n'apparaissent jamais dans la suite de Conway : c'est le cas des séquences …333…, …2332…, …1131…, …1313…, etc. (Pour chacune, il est possible d'en faire une démonstration par l'absurde.)

Conclusion et ouvertures.

Ainsi, nous avons réussi à établir un certain nombre de propriétés caractérisant les éléments de la suite de Conway et leur construction itérative.

Cependant, cette approche est loin d'être exhaustive. Il conviendrait en particulier de généraliser cette approche aux suites de *type Conway* de terme initial *a*, d'approfondir l'étude des séquences stables …

Il pourrait également être intéressant de rapprocher la structure d'une ligne donnée de la suite avec des séquences biochimiques (A.D.N.) ou des représentations fractales … [NDLC. On peut rêver …]

On peut en tout cas envisager une étude similaire pour les autres suites de la même famille, à savoir toutes celles qui se définissent par une *lecture* récurrente.

[NDLR. On trouvera certaines preuves de propriétés de la suite de Conway dans les actes du congrès MATh.en.JEANS de 1995, page 153.]