combinatoire des morceaux d’échiquiers

par MM. Ibrahim Abdou-Saïdi, Mickaël Dautricourt, Laurent Thevenet, élèves de 5$^{\text{ème}}$ 6$^{\text{ème}}$ et 3$^{\text{ème}}$ du **collège André Doucet de Nanterre (92)**, établissement jumelé avec **l’école Voltaire de Nanterre (92)**

enseignants :
Mmes Danièle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, M. Marc Douaire

chercheur :
M. Pierre Duchet

[Note du chercheur : le travail hebdomadaire des écoliers était intégré à leur emploi du temps (1h1/4 par semaine). Les collégiens travaillaient 2h par semaine en plus de leur horaire habituel.]

coordination article : Thevenet Laurent

compte-rendu de parrainage :

La recherche est basée sur les relations différentes entre les paramètres d’un polymino. Les élèves ont très bien marqué les dépendances entre tels paramètres que le nombre de cases, de trous, d’allumettes, d’allumettes formant la frontière et de pavés d’un polymino. Il manque de définition plus stricte d’un trou dans un polymino. La manière générale de la démonstration est correcte mais chaque cas particulier n’a pas été bien regardé. En général, la recherche est très intéressante.

C — Combinatoire des morceaux d’échiquiers (polyminos) 29

Le mot “*polymino*” désigne un assemblage de carrés tous égaux (les “cases”) collés entre eux par un de leur côtés. On peut les voir comme des morceaux d’échiquiers ou de damiers. Un polymino composé de deux cases est ainsi un *domino.*

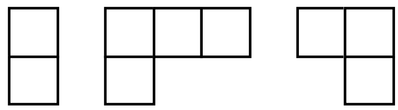
Bien que la structure des polyminos paraisse très simple, les problèmes combinatoires qu’ils posent s’avèrent difficiles, qu’il s’agisse de pavage, de parcours ou de représentation. Des relations entre divers paramètres (nombres de côtés, de cases, de trous, périmètres, …) peuvent faire avancer l’étude de ces formes.

Notre sujet : les polyminos.

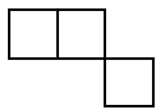
Les **polyminos** sont des morceaux d’échiquiers qui sont d’un seul tenant : deux cases quelconques ont au moins un côté en commun.

[NDLR : formulation trop rapide de la notion de « **connexité** » (cf. article suivant, p. 275) ; l'idée est que chaque case est reliée au « reste » par au moins un côté, et que le polymino peut être construit par additions successives de cases reliées au reste (= ce qui est déjà construit)].

Exemples :



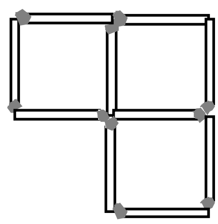
sont des polyminos.



n’en est pas un.

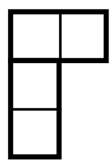
On peut les fabriquer …

… avec des allumettes :



3 cases carrées, avec 10 allumettes ; circonférence : 8 allumettes.

… ou avec d’autres polyminos plus simples :



Deux dominos peuvent former un polymino de 4 cases … (mais pas n’importe lequel !)

Nous avons étudié les trois questions suivantes :

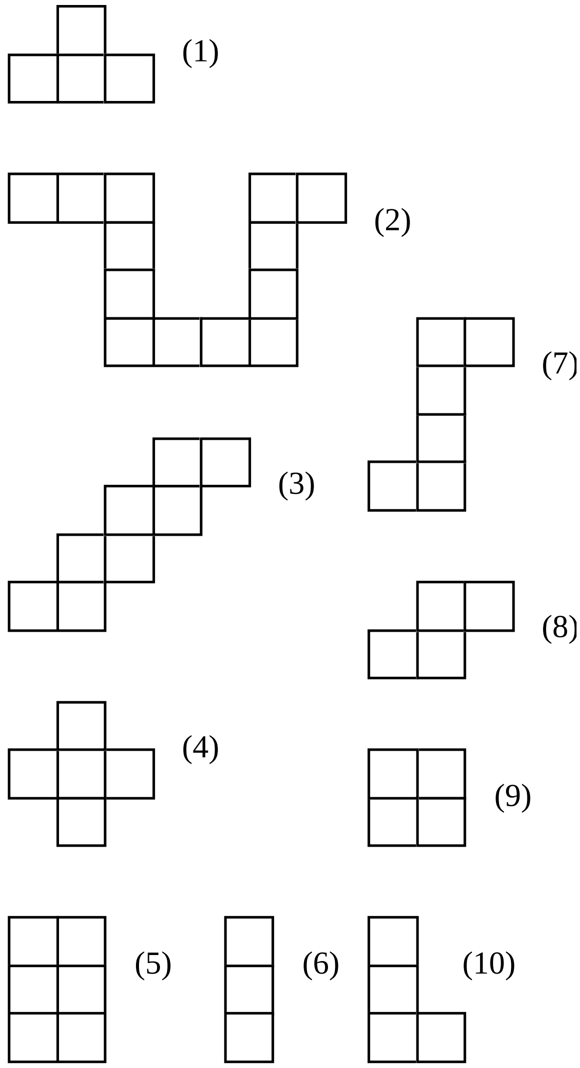
❖ Y a-t-il des relations entre nombres de carrés, nombre d'allumettes, circonférence ? Comment intervient le nombre de "trous" ?

❖ Quels polyminos peuvent être construits avec des dominos ?

Peut-on construire un échiquier avec deux cases manquantes ?

❖ On peut parcourir un échiquier en respectant une règle de parcours (exemple : déplacement du cavalier aux échecs). Peut-on parcourir de la même manière (on ne peut pas repasser par une case déjà visitée) un échiquier privé de deux cases ?

Nombres d'allumettes.



Nos décomptes.

	Nombre de carrés	Périmètre	Nombre d'allumettes
(1)	4	10	13
(2)	13	28	40
(3)	8	18	25
(4)	5	12	16
(5)	6	10	17
(6)	3	8	10
(7)	6	14	19
(8)	4	10	13
(9)	4	8	12
(10)	4	10	13

Nos formules.

N = nombre d'allumettes

p = nombre de "pavés" (un pavé est un bloc carré de quatre cases)

t = nombre de "trous" (un trou est une région vide entourée d'une succession de cases du polymino, se touchant par un côté et se fermant : chaque case touche la précédente et la dernière touche la première)

n = nombre de cases

☞ $\boldsymbol{N = 3n + 1 - p - t}$

P désigne le périmètre (le nombre d'allumettes autour de la figure).

☞ $\boldsymbol{P = 2n + 2 - 2p - 2t}$

Démonstration par récurrence : [NDLR : seule la première formule est ici étudiée ; une procédure analogue peut s'appliquer pour la seconde formule.]

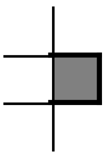
Si le nombre de cases n est égal à 1, on remplace n par 1 dans la formule. Comme il n'y a ni pavé ni trou à l'intérieur, $p = 0$ et $t = 0$. On remplace dans la formule, puis on calcule :

$$N = 3 \times 1 + 1 - 0 - 0$$
$$N = 4$$

On trouve 4, et comme on sait qu'un carré a quatre côtés (donc 4 allumettes), la formule est vraie pour $n = 1$.

Supposons que cette formule soit vraie pour n. S'il y a n cases alors $N = 3n + 1 - p - t$. Pour rajouter une case (on a alors $(n+1)$ cases), **on peut** : [NDLR : le nombre de sous-cas à examiner est assez grand ; seuls sont traités ici les plus simples.]

♦ **ajouter 3 allumettes** : (voir figure 1)



[En gris la case qui a été rajoutée.]

Figure 1.

[On ne peut créer ni trou ni bloc.] N est le nombre d'allumettes ; donc on ajoute trois allumettes dans la formule quand on ajoute trois allumettes sur une case :

$$N = 3n + 1 - p - t + 3$$

On sait que $3n + 3$ est égal à $3(n+1)$; $n+1$ signifie qu'il y a une case de plus qu'au début.

$$N = 3(n+1) + 1 - p - t$$

♦ **ajouter 2 allumettes** : (voir figures 2 et 3)

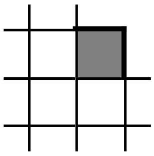


Figure 2.a.

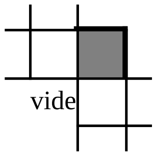


Figure 2.b.

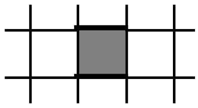


Figure 3.

On distingue deux cas : dans l'un on crée un pavé supplémentaire [figure 2.a.] et dans l'autre un trou supplémentaire [figures 2.b. et 3.].

$$N = 3n + 1 - p - t + 2$$
$$N = 3(n+1) + 1 - (P+1) - t$$
$$N = 3(n+1) + 1 - p' - t$$

où p' est le nouveau nombre de "pavés".

$$N = 3(n+1) + 1 - p - (t+1)$$
$$N = 3(n+1) + 1 - p - t'$$

où t' est le nouveau nombre de "trous"

♦ **ajouter 1 allumette** : (voir figures 4)

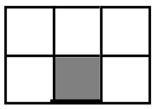


Figure 4.a.

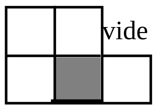


Figure 4.b.

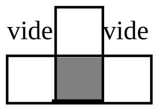


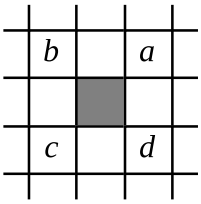
Figure 4.c.

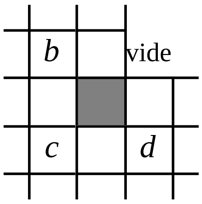
On crée deux "pavés" supplémentaires.

$$N = 3n + 1 - p - t + 1$$
$$N = 3(n+1) + 1 -(p+2) - t$$
$$N = 3(n+1) + 1 - p' - t$$

où p' est le nouveau nombre de "pavés"

♦ **ajouter 0 allumette** : (voir figure 5) [NDLR : dans les autres cas, on ajoute 1 bloc et 1 trou ou 2 trous …]





etc.

Figure 5.a. *Figure 5.b.*

[Dans le cas de la figure 5.a.,] on ferme un “trou” et on crée donc 4 pavés supplémentaires.

$$N = 3n + 1 – p – t$$
$$N = 3(n+1) + 1 – (p+4) – (t–1)$$
$$N = 3(n+1) + 1 – p' – t$$

où p' est le nouveau nombre de “pavés” et t' le nouveau nombre de “trous”.

[NDLR : dans les autres cas, certaines des cases *a*, *b*, *c*, *d* sont vides et on peut fermer 0, 1, 2 ou 3 blocs tout en créant 3, 2, 1 ou 0 trous …]

Donc la formule est aussi vraie dans tous les cas pour (n+1) … donc elle est vraie pour tout nombre n supérieur ou égal à 1 .

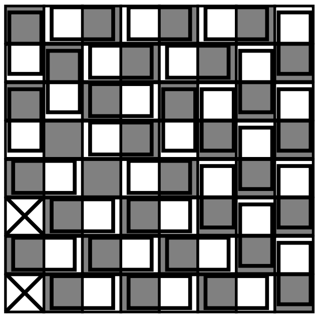
Pavage par dominos.

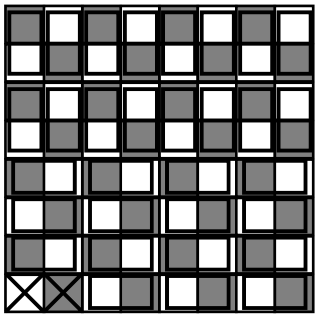
On a cherché à paver un échiquier de 64 cases avec des dominos (2 cases côte à côte), après avoir retiré certaines cases de cet échiquier.

En règle générale, on ne pourra paver un échiquier si on enlève un nombre impair de cases.

☞ Dans un échiquier de 64 cases, si on enlève les 2 cases aux extrémités d’une diagonale, on ne pourra pas paver le reste de l’échiquier avec des dominos.

Loi générale : Dans un échiquier de 64 cases, si on enlève deux cases de même couleur (2 noires ou 2 blanches), on ne pourra pas paver le reste de l’échiquier avec des dominos.





☞ Si on enlève les 2 cases aux extrémités d’un même côté, on pourra paver le reste de l’échiquier avec des dominos.

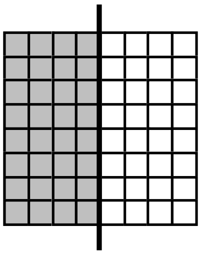
[Note du chercheur : une des difficultés, inattendue (et finalement surmontée par cette « loi »), a été de trouver un pavage de tout l'échiquier par des dominos. La discussion a amené la conjecture suivante :]

Conjecture : Si on enlève deux cases de couleurs différentes, on pourra paver le reste de l’échiquier avec des dominos.

Parcours de l'échiquier en mouvement du cavalier.

Le cavalier peut parcourir deux types de trajets : ouvert ou fermé. Les deux échiquiers ci-après vous montrent les deux sortes de trajets : celui de Collini est ouvert, c'est-à-dire que le cavalier part d'un point précis, indiqué en plus gras, pour arriver à un autre. Par contre, le trajet imaginé par Euler est fermé, c'est-à-dire qu'arrivé à la 64ème case, le cavalier peut revenir à la première et recommencer.

Parcours n° 1

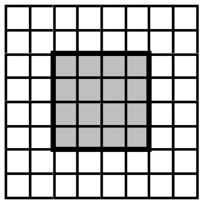


Euler a imaginé en 1759 la formule qui consiste à couvrir complètement une moitié de l'échiquier avant de passer à la seconde.

Cette méthode produit un beau dessin symétrique.

15	6	17	32	43	34	53	60
24	31	14	7	52	59	42	35
5	16	25	18	33	44	61	54
30	23	8	13	58	51	36	41
9	4	19	26	45	40	55	62
22	29	12	**1**	50	57	48	37
3	10	27	20	39	46	63	56
28	21	2	11	**64**	49	38	47

Parcours n° 2



Le mathématicien Collini, en 1773, a trouvé un autre système :

On trace au centre de l'échiquier une zone de 16 cases. Les douze premiers sauts du cavalier ont lieu hors de cette zone, puis les quatre suivants, de façon symétrique, au centre ; puis douze dehors, quatre symétriques dedans, et ainsi de suite jusqu'au dernier saut, qui amène le cavalier dans la zone centrale.

40	57	22	3	42	59	24	5
21	2	41	58	23	4	43	60
56	39	14	31	48	61	6	25
1	20	47	**64**	15	32	49	44
38	55	30	13	62	45	26	7
19	12	63	46	29	16	33	50
54	37	10	17	52	35	8	27
11	18	53	36	9	28	51	34

[NDLR : Le nombre exact de parcours possibles a été trouvé récemment, par une utilisation judicieuse de plusieurs ordinateurs. Löbbing M., Wegner I., *The Number of Knight's Tours Equals 33 439 123 484 294. Counting with Binary Decision Diagram.*, Electronic Journal of Combinatorics, January 1996.]