cavalier et échiquiers

par M. Geoffroy Aubry, DEUG, **Université de Marseille Luminy**

enseignant :
M. Laurent Beddou

chercheurs :
MM. Pierre Arnoux, Christian Mauduit

coordination article : Beddou Laurent

compte-rendu de parrainage :

Recherche de chemins de parcours d'un cavalier sur un échiquier de taille quelconque, en revenant à la case de départ sans passer deux fois par la même case : étude de configurations particulières, utilisation "modulaire" de circuits de base ⇒ résolution de cas plus généraux.

Exposé clair, mais ressemblant un peu à une étude de cas, manquant d'une vision globale ("recettes").

Le fameux problème du cavalier d'Euler consiste à déplacer un cavalier du jeu d'échecs et à parcourir toutes les cases de l'échiquier sans repasser deux fois au même endroit.

Peut-on y parvenir sur des échiquiers plus généraux ?

[NDLC : ce qui suit est la transcription à peu près conforme des panneaux exposés dans *La rue*, lors du congrès.]

Existe-t-il un chemin permettant à un cavalier respectant les règles des échecs de passer une fois et une seule par chacune des cases d'un échiquier rectangle $n \times p$?

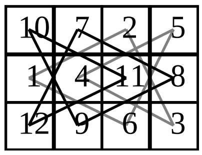
De l'informatique :

La première idée venue fut de réaliser un programme en *Pascal* parcourant l'arbre de tous les chemins possibles : on lui fournissait les dimensions d'un échiquier et il nous retournait toutes les solutions, case par case, de cet échiquier.

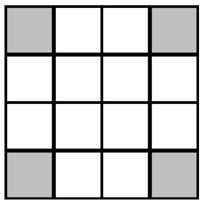
Mais si le temps de calcul pour un échiquier 5×5 était inférieur à la minute, le 6×6 nécessitait plus de deux heures (réalisé sur un 486 DX4 100). Malgré diverses optimisations, ce programme montrait donc ses limites. (Idée non développée de parcours aléatoire du cavalier.)

Néanmoins, il permit d'orienter des démonstrations prouvant la non-existence de solution pour des échiquiers tels que le 4×4, le 3×5 ou encore le 3×6.

Exemple d'une solution pour le 3×4 :



Echiquier 4×4 : voyez-vous un chemin qui passe par les quatre coins ?



C'est impossible. Il n'existe donc aucune solution.

Majoration :

Voici une méthode permettant, pour un échiquier $n \times p$, de calculer le nombre total de chemins composés de $n \times p - 1$ sauts de cavalier. Ce dernier pouvant ici revenir sur ses pas, ce n'est qu'une majoration (large) du nombre de solutions au problème posé.

Prenons l'exemple de l'échiquier 4×3 :

1	3	1
2	4	2
2	4	2
1	3	1

Grâce aux symétries, seuls quatre numéros sont nécessaires !

• A la case i, on associe la suite U_n^i avec $U_1^i = 1$, $1 \le i \le 4$.

• Vu le déplacement du cavalier, on a, pour $n \ge 2$:

$$U_n^1 = U_{n-1}^2 + U_{n-1}^4$$
$$U_n^2 = U_{n-1}^1 + U_{n-1}^2 + U_{n-1}^3$$
$$U_n^3 = 2\,U_{n-1}^2$$
$$U_n^4 = 2\,U_{n-1}^1$$

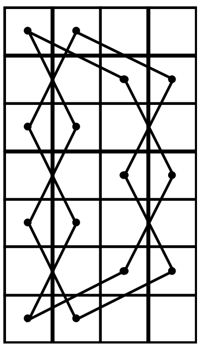
Nombre total de chemins :

$$4\,U_{12}^1 + 4\,U_{12}^2 + 2\,U_{12}^3 + 2\,U_{12}^4 = 204\,172$$

Pour un échiquier 4×4, on a : 371 723 264.
Pour un échiquier 5×5, on a : 2×10^{16}.
Pour un échiquier 6×6, on a : 9×10^{23}.

De la géométrie :

Après avoir schématisé le déplacement du cavalier, une remarque s'impose :

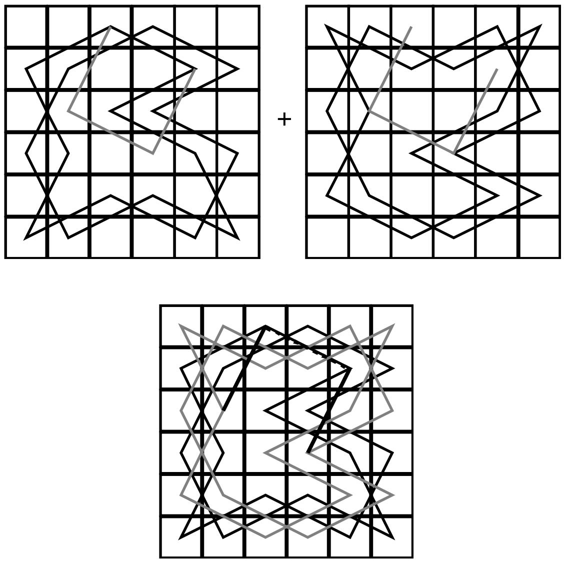


• Ce circuit permettait de passer par la moitié des cases de cet échiquier, un circuit symétrique parcourait l'autre.

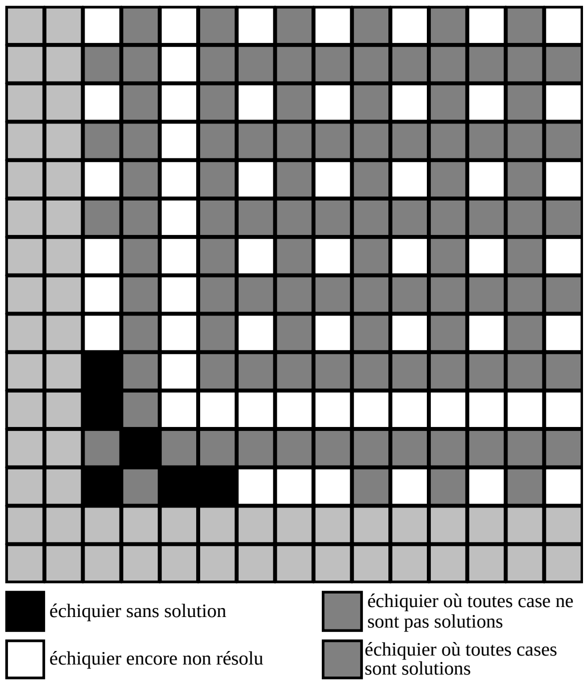
• S'apercevant que l'on pouvait réunir ces deux circuits, on en déduisit qu'à partir de chaque case commençait au moins un chemin solution du problème (pour cet échiquier).

Il ne restait plus alors qu'à trouver d'autres circuits et à les rendre « modulables » pour s'adapter à un plus grand nombre d'échiquiers.

Echiquier 6×6 :



Résultats :



Extensions au problème :

• On peut imaginer des échiquiers non rectangulaires (triangulaires, …).
• On pourrait interdire certaines cases au passage du cavalier.
• Le cavalier pourrait se déplacer autrement.
• Une nouvelle contrainte pourrait être de ne pas se faire croiser le chemin.