# les boussoles

par M. Karim Kaabeche, M. Aurélien Gonzales, M. Erwan Ruaud, élèves de TS du **lycée Georges Braque d'Argenteuil (95)**, établissement jumelé avec le **lycée Fragonard de l'Isle-Adam (95)**

enseignante :
Mme Joëlle Richard

chercheur :
M. Stéphane Labbé

coordination article : Gonzales Aurélien

*compte-rendu de parrainage :*

*Le sujet auquel ils se sont intéressés était assez intéressant (!). Mais la difficulté des formules rendait l'exposé un peu rude à suivre. Malgré tout, les résultats sont fort probants. Peut-être qu'ils auraient pu aller plus loin …*

**An — Boussoles dans un champ magnétique. 30**

Comment vont se comporter des boussoles placées en réseau sous l'influence d'un aimant ?

Lorsqu'on étudie le comportement de matières fluides formées de particules ayant des propriétés électriques et/ou magnétiques (par exemple des électrons), l'interaction des particules entre elles rend difficile la simulation et la prévision ; les mathématiques permettent d'y voir (un peu) plus clair.

*Intéressés par la physique et l'aspect pratique des mathématiques, nous avons donc choisi ce sujet, qui illustre la passerelle entre ces deux sciences : les mathématiques ont ici servi à démontrer les propriétés physiques observées sur des boussoles.*

Notre ***sujet*** est le suivant :

Des boussoles sont placées sur une plaque, qu'elles soient ou non soumises à un champ magnétique extérieur, elles bougeront les unes par rapport aux autres pour s'immobiliser dans une position d'équilibre.

La loi que suivent les boussoles est la suivante : toujours être dirigées comme le champ magnétique régnant en un point donné.

## *Quelques définitions et notations : « Ne perdons pas le Nord ».*

(Toutes les boussoles sont numérotées et désignées par leur indice.)

Le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{dipolaire}}$$

$$\vec{B}_{\text{dipolaire}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \neq j} \frac{3\,\vec{M}_j . \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \vec{r}_{ij} - \frac{\vec{M}_j}{r_{ij}^3} \qquad \textbf{(I)}$$

(sur la boussole $i$)

[NDLR : Cette expression vient d'un calcul effectué préalablement par les physiciens pour exprimer la valeur du champ magnétique créé par un « dipôle magnétique », dipôle auquel peut être assimilée une boussole.]

avec les définitions suivantes :

$\vec{M}_j$ = moment magnétique de la boussole $j$.

$\vec{r}_{ij}$ = vecteur dont les extrémités sont les centres des deux boussoles $i$ et $j$.

$r_{ij}$ = distance des centres des deux boussoles $i$ et $j$.

$\mu_0$ = constante universelle

**Qu'est-ce que le moment magnétique ?**

$\vec{M}_j = m\,\vec{m}_j$

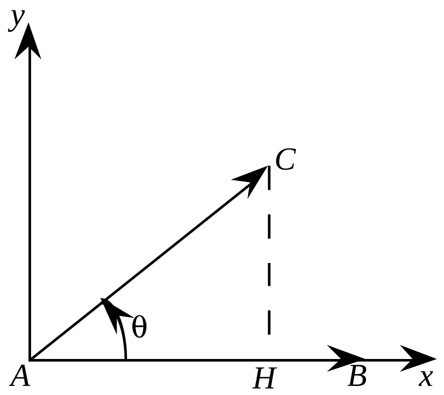
$m$ = module d'aimantation

$\vec{m}_j$ = vecteur représentant la boussole $j$ *(voir figure 2.1*)

**Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?**

$\vec{M}_j . \vec{r}_{ij}$ est un produit scalaire, c'est-à-dire un nombre réel. Prenons : $\vec{M}_j = \overrightarrow{AC}$

*Figure 1.2*



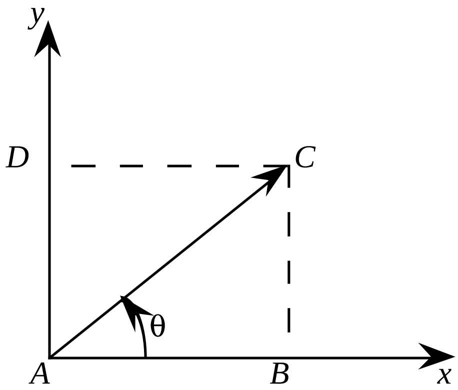

$\vec{r}_{ij} = \overrightarrow{AB}$

Les deux vecteurs forment un angle "θ" ; pour H le projeté orthogonal de C sur (AB) :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AB \times AH = AB \times AC \cos(\theta).$$

**Projection d'un vecteur sur des axes.**

*Figure 1.1*




Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a donc des coordonnées suivant les axes (O$x$) et (O$y$) :

$$\overrightarrow{AC} : x = AB,\ y = AD$$

Définition de la tangente d'un angle θ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

avec

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB}$$
$$\cos\theta = \frac{AB}{BC}$$

donc

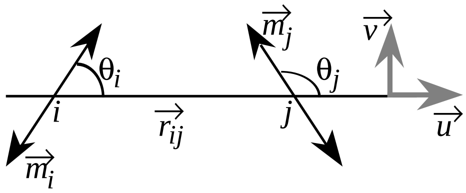
$$\tan\theta = \frac{AC}{AB}$$

[NDLR : Ceci n'a de sens bien défini que si $AB \neq 0$ (ou $\cos\theta \neq 0$, ou $\theta$ Ú $\pi/2[\pi]$).]

## *Cas de deux boussoles.*

Commençons par étudier le cas de deux boussoles. Chaque boussole “$i$” crée un champ magnétique $\vec{B}_{ij}$ qui agit sur la boussole “$j$”

*Figure 2.1*




Après simplification, la formule **(I)** devient :

$$\vec{B}_{ij} = \frac{\mu_0 m}{4\,\pi\, r_{ij}^3}\left(3\cos\theta_j\,\vec{u} - \vec{m}_j\right)$$

En effet :

$$\vec{B}_{ij} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\left(\frac{3\,\vec{M}_j.\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5}\,\vec{r}_{ij} - \frac{\vec{M}_j}{r_{ij}^3}\right)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\,\pi}\left(\frac{3\,\vec{M}_j.r_{ij}\vec{u}}{r_{ij}^5}\,r_{ij}\,\vec{u} - m\,\vec{m}_j\right)$$

Or $\vec{M}_j.\vec{u} = m\cos\theta_j$

$$\vec{B}_{ij} = \frac{\mu_0 m}{4\,\pi\, r_{ij}^3}\left(3\cos\theta_j\,\vec{u} - \vec{m}_j\right)$$

Projetons le vecteur $\vec{B}_{ij}$ dans la base $(\vec{u}\ ; \vec{v})$ ; les coordonnées sont alors :

$$\vec{B}_{ij} : \begin{cases} B_x = \dfrac{\mu_0 m}{4\,\pi\, r_{ij}^3}\left(2\cos\theta_j\right) \\ B_y = \dfrac{\mu_0 m}{4\,\pi\, r_{ij}^3}\left(\sin\theta_j\right) \end{cases}$$

La condition d’équilibre des deux boussoles se traduit par le système :

$$\begin{cases} \vec{B}_{ij} = k\,\vec{m}_i \\ \vec{B}_{ji} = k'\,\vec{m}_j \end{cases}$$

$$\vec{B}_{ij} = k\,\vec{m}_i \Leftrightarrow \begin{cases} [1]\ \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r_{ij}^3}\,2\cos\theta_j = k\cos\theta_i \\ [2]\ \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r_{ij}^3}\left(-\sin\theta_j\right) = k\sin\theta_i \end{cases}$$

$$\vec{B}_{ji} = k'\,\vec{m}_j \Leftrightarrow \begin{cases} [3]\ \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r_{ij}^3}\,2\cos\theta_i = k'\cos\theta_j \\ [4]\ \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r_{ij}^3}\left(-\sin\theta_i\right) = k'\sin\theta_j \end{cases}$$

En divisant les deux membres de l’égalité **[2]** par ceux de l’égalité **[1]**, nous obtenons :

$$-\frac{\tan\theta_j}{2} = \tan\theta_i$$

[NDLR : ... à condition toutefois que les membres de l’équation **[1]** ne soient pas nuls.]

De même avec les égalités **[4]** et **[3]**, ce qui nous donne :

$$-\frac{\tan\theta_i}{2} = \tan\theta_j$$

donc

$$-\frac{\tan\theta_j}{2} = \tan\theta_j$$
$$\tan\theta_j = 0$$
$$\theta_j \equiv 0\ [\pi]$$

de même :

$$-\frac{\tan\theta_i}{2} = \tan\theta_i$$
$$\tan\theta_i = 0$$
$$\theta_i \equiv 0\ [\pi]$$

On montre ainsi que les angles fournis par les deux boussoles sont égaux et nuls : les boussoles sont alignées.

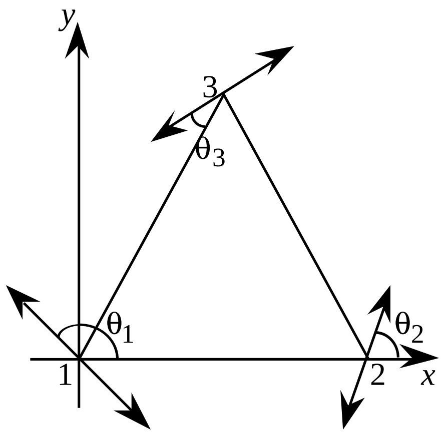
[NDLR : Une autre solution existe peut-être, correspondant au cas où $\cos\theta_j = \cos\theta_i = 0$.]
[NDLC : ne perdons pas le nord, qu’i’ disaient, mais il est où le nord pour ces boussoles ?]

## *Cas de trois boussoles.*

Etudions maintenant le cas de trois boussoles.

Hypothèse : on place les centres de trois boussoles aux sommets d'un triangle équilatéral. Appelons les boussoles 1, 2, 3.

*Figure 3.1*




$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,\vec{u}_{12}\ m\cos\theta_2}{r^3} - \frac{\vec{m}_2}{r^3}\right)$$

$$\vec{B}_{13} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\,\vec{u}_{13}\ m\cos\theta_3}{r^3} - \frac{\vec{m}_3}{r^3}\right)$$

$$\vec{m}_2 = m_2\cos\theta_2\,\vec{i} + m_2\sin\theta_2\,\vec{j}$$

$$\vec{m}_3 = m_3\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta_3\right)\vec{i} + m_3\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta_3\right)\vec{j}$$

A l'équilibre : le vecteur $\overrightarrow{B}$ sur $\overrightarrow{I}$ doit être colinéaire au vecteur champ magnétique.

$$\vec{B}_{12} + \vec{B}_{13} = K\,\vec{m}_1$$

Projetons sur les axes :

$$\vec{B}\text{ sur }\vec{i} = K\,\vec{m}_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} [5]\ \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta_3 + \dfrac{3}{2}\cos\theta_3 - \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta_3\right)\right) \\ \qquad = Km\cos\theta_1 \\ [6]\ \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(-\sin\theta_2 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta_3 - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta_3\right)\right) \\ \qquad = Km\sin\theta_1 \end{cases}$$

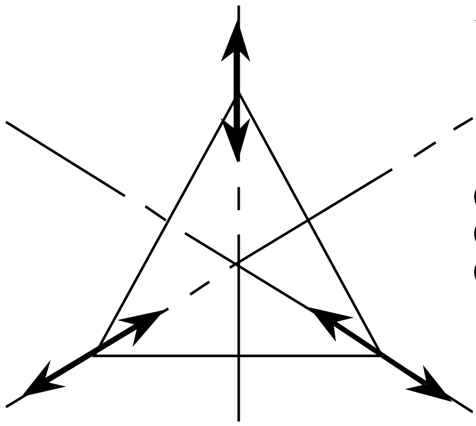
Pour obtenir $\tan\theta_1$ divisons **[6]** par **[5]** :

$$[7]\ \tan\theta_1 = \frac{-\sin\theta_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta_3 - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta_3\right)}{2\cos\theta_3 + \frac{3}{2}\cos\theta_3 - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta_3\right)}$$

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie ; par raison de symétrie, les boussoles ne peuvent donc avoir que deux positions d'équilibre. Elles sont …

… soit confondues avec les axes :

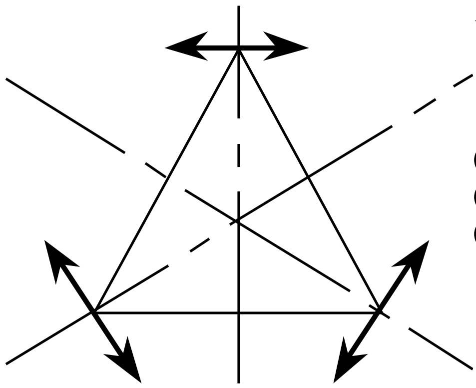
*Figure 3.2*



$\theta_1 = \pi/6$
$\theta_2 = 5\pi/6$
$\theta_3 = \pi/2$

… soit perpendiculaires aux axes :

*Figure 3.3*



$\theta_1 = 2\pi/3$
$\theta_2 = 2\pi/3$
$\theta_3 = \pi/3$

Nous avons remplacé les angles par leur valeur dans l'égalité **[7]**. Cette égalité **[7]** a été vérifiée lorsque les boussoles étaient perpendiculaires aux hauteurs donc, la position d'équilibre est la position de la figure 3.3.

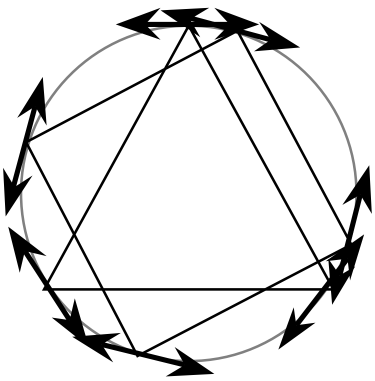
## *Généralisation.*

Nous avons vu le cas avec trois boussoles qui, lorsque nous les plaçons sur les sommets d'un triangle équilatéral, apparaissent dans la configuration d'équilibre des axes de symétrie correspondant à ceux de ce triangle. Et, grâce aux formules, nous avons obtenu le résultat suivant, à l'équilibre : les boussoles se disposent tangentiellement au cercle circonscrit à ce triangle qui est un polygone régulier de trois côtés.

Par conséquent, nous pensons pouvoir généraliser ce résultat de la façon suivante au cas de "*n*" boussoles :

Si on place *n* boussoles sur les sommets d'un polygone régulier de *n* côtés, alors, à l'équilibre, les boussoles seront dirigées tangentiellement au cercle circonscrit à ce polygone.

*Figure 4.1*



## *Conclusion.*

Nous avons donc réussi à déterminer la position d'équilibre pour le cas de deux boussoles, puis pour le cas de trois boussoles et nous avons fini par conjecturer un résultat pour "*n*" boussoles posées aux sommets d'un polygone régulier.

Par conséquent, il faudrait arriver à démontrer la généralisation, peut-être à l'aide d'une [démonstration par] récurrence.

De plus, il reste à aborder la question du champ magnétique extérieur.