comment peut-on tracer des courbes à partir d’équations différentielles ?

par Mlle Cécile Deconninck (1°STT), Mlle Aurélia Dabon (1°S), Mlle Iyani Thanthrillage (1°S), Mlle Christine Montoya (1°S), Mlle Sophie-Caroline Cogniaud (1°S), élèves du **lycée Georges Braque d’Argenteuil (95)**

enseignantes :
Mme Joëlle Richard

chercheur :
M. Stéphane Labbé

coordination article : Dabon Aurélia

compte-rendu de parrainage :

D’après des équations différentielles, elles ont essayé de construire des courbes. Bien qu’elles aient oublié de regarder les conditions initiales, elles ont bien expliqué le sujet à l’aide d’exemples simples. Elles nous ont montré de très belles courbes effectuées à l’ordinateur.

ESAn — Une courbe à tracer : équations différentielles du type Lorenz. 25

Dans un domaine où une vitesse de passage est imposée en chaque point, comment trouver le chemin correspondant ? Telles se présentent certaines équations “différentielles”.

Ce genre de question est inévitable lorsqu’on souhaite simuler ou contrôler l’écoulement d’un gaz, d’un liquide ou, plus théoriquement, comprendre l’évolution d’un système.

Introduction.

Le sujet qui nous a été proposé peut aider à modéliser un phénomène physique. Voici l’exemple que nous a donné notre chercheur :

« Un fluide circule entre deux plaques, l’une chaude et l’autre froide. La trajectoire d’une goutte de ce fluide est une courbe.

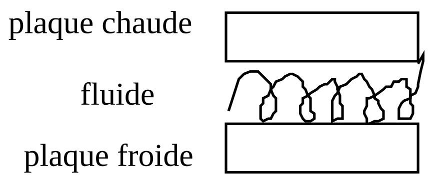
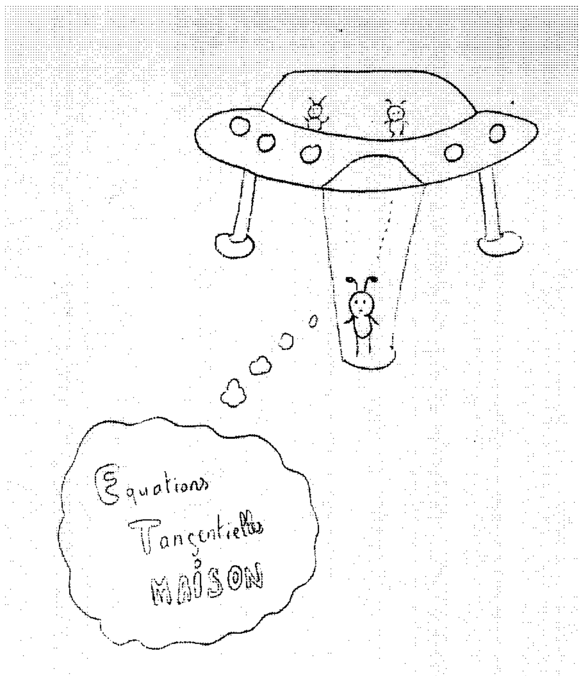


Figure 1.

Quelle est l’allure de cette courbe ?
Sa forme ?
Est-elle régulière ? Chaotique ? »

Ce problème a d’autant plus éveillé notre curiosité que le chercheur précisait que ces courbes pouvaient être obtenues à partir : D’EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Nous avons donc voulu connaître ces nouveaux Etres Mathématiques, Martiens peut-être, qui nous étaient inconnus jusqu’ici.



Or, qui dit équations différentielles dit DERIVEES.

« — Mais qu'est-ce-qu'une dérivée ? », nous direz-vous.

« — Pas de Panique ! »

Nous allons dans un premier temps éclairer vos lanternes en définissant ce terme, puis, une fois que l'ampoule de votre esprit sera illuminée, nous tenterons de vous expliquer comment la dérivée intervient dans le tracé des courbes à partir d'équations différentielles.

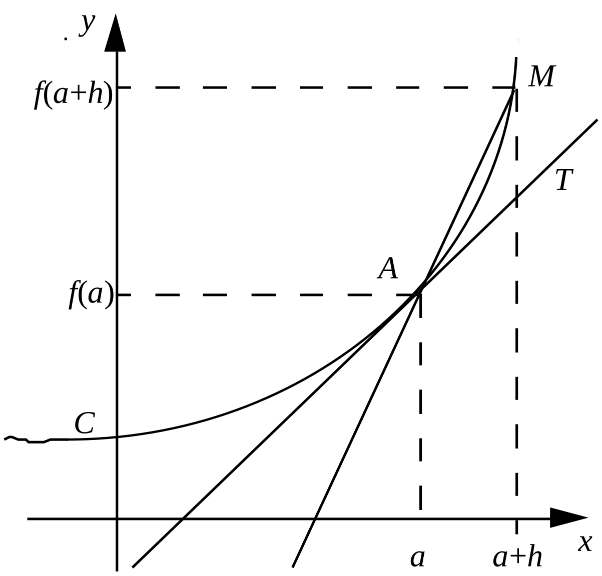


Figure 2.

Dérivée.

« — Que se cache-t-il donc derrière ce mot Dérivée ? »

Nous allons vous l'expliquer à l'aide du schéma ci-contre. Dans un repère, on a tracé la courbe représentative C d'une fonction f. A est un point fixe de C de coordonnées (a ; $f(a)$), M est un point variable de C de coordonnées ($x = a + h$; $y = f(a + h)$). La pente de la droite (AM), c'est-à-dire son coefficient directeur, est égale à :

$$\frac{y_m - y_a}{x_m - x_a} \quad soit \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A présent, imaginons que le point M soit mobile et qu'il se déplace sur C en se rapprochant indéfiniment du point A. La droite (AM) pivote donc autour de A. Elle atteint ainsi une position limite : la **Tangente** (AT) à la courbe en A. Le coefficient directeur de cette tangente est alors la limite du rapport :

$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

C'est cette limite que l'on appelle la dérivée de la fonction f pour la valeur $x = a$.

En général, on connaît la courbe C et on en déduit la tangente à la courbe en ses différents points. Mais on peut se poser le problème inverse :

« Si l'on connait les tangentes à une courbe
en ses différents points,
peut-on tracer cette courbe ? »

Une courbe peut être considérée comme la trajectoire d'un mobile qui se déplace en fonction du temps. Un point M de cette courbe a pour coordonnées $x(t)$ et $y(t)$. La tangente à la courbe en M a pour vecteur directeur un vecteur $\boldsymbol{v}$ de coordonnées :

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) \qquad \frac{dy}{dt} = y'(t)$$

Ce vecteur est le vecteur vitesse du mobile M.

Or $\dfrac{dx}{dt} et \dfrac{dy}{dt}$ sont justement les dérivées de x et de y par rapport à t.

Si l'on connaît $\dfrac{dx}{dt} et \dfrac{dy}{dt}$ peut on en déduire la courbe décrite par le mobile M ?

La réponse est oui. Nous allons vous donner quelques exemples simples. Pour commencer, un petit problème concret :

La courbe du chien.

« Sur une plage, un jeune homme se promène avec son chien. Subitement le chien s'échappe. Le maître continue à avancer dans la même direction. Le chien se rendant compte que son maître ne l'attend pas tente à présent de le rejoindre. »

Pour simplifier, supposons que le chien se trouve sur l'axe des abscisses et que le maître se déplace sur l'axe des ordonnées.

Le chien essaye de rejoindre son maître. Il regarde son maître Xercès (*X*) et se déplace sur un segment dans sa direction (*C*X) (*C* étant le chien Caïus).

Ils se déplacent tous les deux à la même vitesse.

Mais pendant ce temps, Xercès a avancé. Il est maintenant en *X'* et Caïus en *C'*. Il se déplace alors sur le segment [*C'C''*].

En reportant à chaque fois le point précédent, on obtient une succession de petits segments tangents à une courbe. Celle que va tracer le chien pour rejoindre son maître.

☞ **Le rejoindra-t-il un jour ?**
(A vous de chercher)

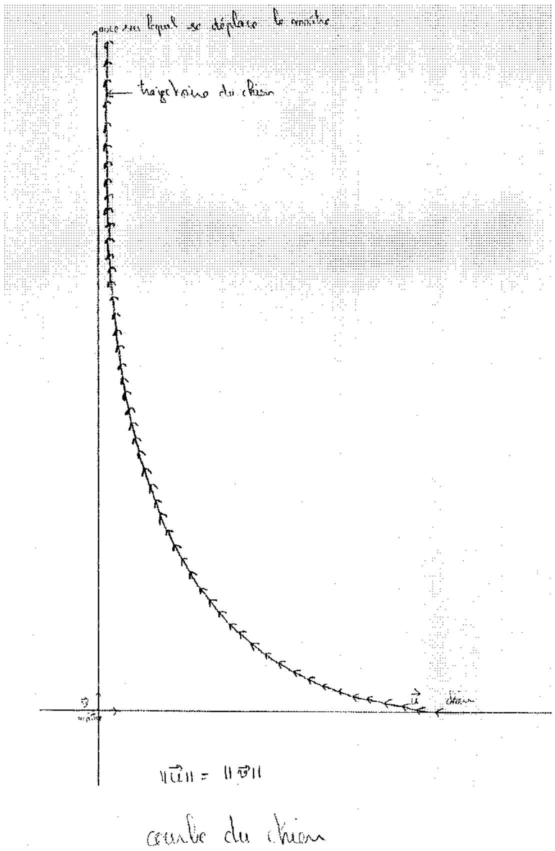


Figure 3.

Prenons maintenant un exemple plus mathématique. On part d'un point *M*(1; 0). on se donne *t*, par exemple : t = 10. Alors

$$\frac{dx}{dt} = \cos 10 \text{ et } \frac{dy}{dt} = \sin 10.$$

On construit un vecteur $\boldsymbol{v}$ (cos 10 ; sin 10). On arrive à un point M_2. On passe ensuite au point M_3 en construisant le vecteur M_2M_3 de coordonnées (cos 20 ; sin 20) et ainsi de suite … On obtient ainsi la courbe :

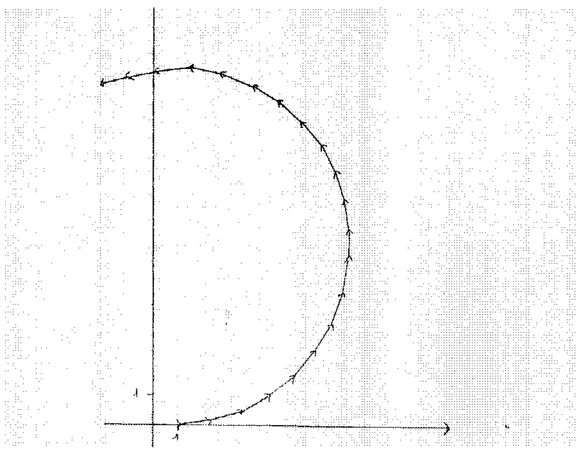


Figure 4.

Nous avons donc fait plusieurs essais de ce type, la seule variable utilisée étant t, mais nous étions impatientes de nous attaquer aux équations mystérieuses que le chercheur nous avait proposées au début de l'année : c'est-à-dire les équations de Lorenz.

Les courbes de Lorenz.

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Voilà qui peut paraître compliqué : 3 équations ! 3 inconnues !

Essayons de faire plus simple en nous en tenant à deux dimensions. Pour nous, plus de « z ». Nous avons alors :

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y$$

σ et r sont des quantités connues, x et y les coordonnées d'un point M de la courbe.

dx/dt et dy/dt sont les coordonnées d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ tangent en M à la courbe que nous voulons construire.

On place d'abord le point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ choisi arbitrairement et on passe au point M_1 en construisant le vecteur M_0M_1 de coordonnées $(-\sigma x_0 + \sigma y_0 ; rx_0 - y_0)$.

Puis au point M_2 tel que le vecteur M_1M_2 ait pour coordonnées $(-\sigma x_1 + \sigma y_1 ; rx_1 - y_1)$.

Mais cela ne nous donnait pas de résultats satisfaisants. C'est pourquoi, au deuxième séminaire, on nous a donné l'idée de poser $M_iM_{i+1} = \Delta t\, \boldsymbol{u}$ où Δt est choisi.

On obtient ainsi :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t(-\sigma x_i + \sigma y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \Delta t(rx_i - y_i)$$

A la main, ces calculs sont rébarbatifs et fastidieux. Merci Calculatrice !

Nous avons donc élaboré un programme qui nous donnait directement les coordonnées des points appartenant à la courbe.

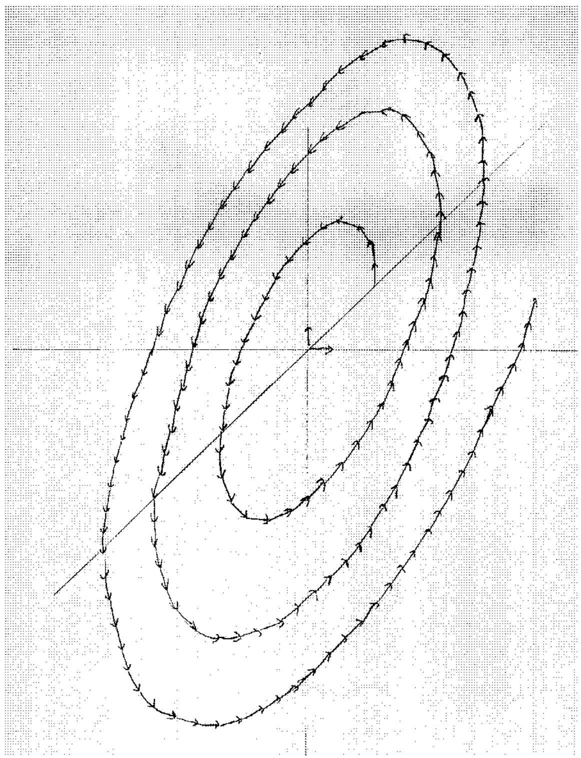
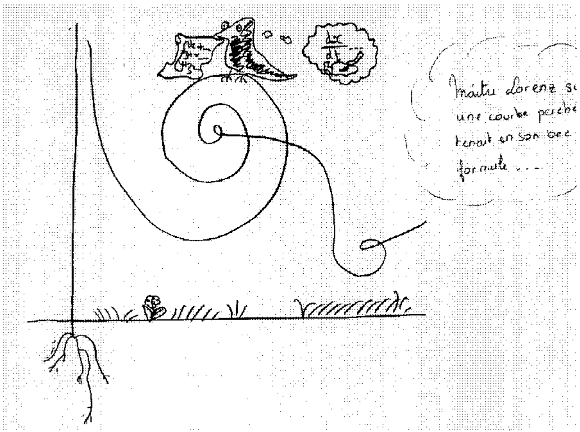


Figure 5.

L'examen de ces courbes ne permettait pas d'observer les propriétés des courbes de Lorenz. C'est pourquoi, pour avoir plus de précision nous avons décidé de tenir compte de z sans pour cela tracer une courbe dans l'espace.



On obtient le système suivant :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t(-\sigma x_i + \sigma y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \Delta t(r x_i - y_i - x_i . z_i)$$
$$z_{i+1} = z_i + \Delta t(x_i . z_i - b z_i)$$

La courbe [qui nous intéresse] sera donc obtenue dans le plan xOy dans lequel on place : $M_0(x_0 ; y_0)$; puis M_1 qui a pour coordonnées :

$$x_1 = x_0 + \Delta t(-\sigma x_0 + \sigma y_0)$$
$$y_1 = y_0 + \Delta t(r x_0 - y_0 - x_0 . z_0)$$

Nous calculons tout de même z_1 qui interviendra ensuite dans le calcul de y_2 donc dans la représentation du point M_2 et ainsi de suite … [NDLR : la courbe tracée est la projection sur le plan (xOy) de la courbe de l'espace (courbe solution) qui, elle, n'est pas tracée.]

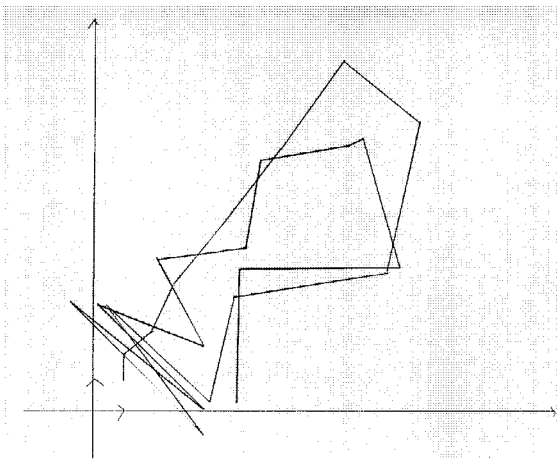


Figure 6.

Le tracé de cette courbe a été fait [essentiellement] à la main car nos moyens informatiques n'étaient pas assez performants.

Nous avons obtenu cette courbe à l'aide du programme suivant …

```
?=}x
?=}y
?=}z:Lbl 1
0.3 [ -10 x + 10y]+x =}Z
0.3 [ 3x-y-x.z]+y =}X
0.3 [x.y-2z]+z =}Y
Z=}x
X=}y
Y=}z
GOTO 1
```

Dans ce programme, 10 représente la valeur de σ, 3 la valeur de r et 2 la valeur de b. C'est un moyen de tenir compte de la troisième dimension.

Par la suite, nous avons eu accès au programme FRACTINT version 19.2 et nous avons ainsi pu obtenir ces courbes.

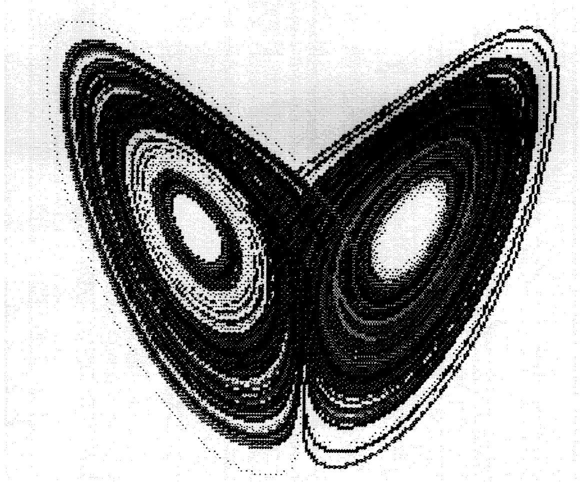


Figure 7.

La différence entre les deux types de tracé est évidente ce qui montre l'importance de la précision de l'outil informatique et aussi du choix des conditions initiales. [NDLR : ces fameuses « conditions initiales » correspondent ici au choix de x_0 et de y_0.]

Voilà c'est fini !! Nous nous sommes arrêtées à ce stade de notre recherche mais il resterait à faire l'examen des courbes de Lorenz en faisant varier de manière plus significative les conditions initiales. Alors si l'envie vous en prend, vous savez ce qu'il vous reste à faire !