mesurer un objet

par Mlle Milaine Haliar et M. Ali Hemouga, avec la participation de Mlle Charlotte Bonnel, MM. M'hamed Charef, Cyril Dominois, Jérémie Durand, Yann Lemaigre, élèves de 6ème et 5ème du **collège André Doucet de Nanterre (92)** et de MM. Mohamed Shidoum, Zane Messaoud, Mlle Evelyne Sos (CM_2) de l'**école Voltaire de Nanterre (92)**

enseignants :
Mmes Danièle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud
M. Marc Douaire

chercheur :
M. Pierre Duchet

[Note du chercheur : le travail hebdomadaire des écoliers était intégré à leur emploi du temps (1h1/4 par semaine). Les collégiens travaillaient 2h par semaine en plus de leur horaire habituel.]

coordination article : Mme Marie-Christine Chanudeaud

(*Pas de parrainage.*)

GAn— Formes et mesures : la peau de chèvre.
Présentation de Posters **28**
École primaire Voltaire (demi-classe de CM2) et Collège A. Doucet (6ème-3ème), Nanterre

Comment découper la plus longue lanière possible avec une peau de chèvre ? Comment, après cela, entourer la plus grande surface possible ?

Comment tirer le meilleur parti d'une surface donnée, d'une longueur donnée ? Le problème de conception d'espace que rencontrait la reine Didon de la légende n'a rien à envier aux variantes modernes que sont la découpe de voile ou la construction d'architectures minimales …

La peau de chèvre.

[NDLR : la peau de chèvre, ici simplifiée par une forme rectangulaire, intervenait dans la présentation par le chercheur de la légende de la reine Didon, contrainte à n'occuper que la place qu'elle pourrait entourer avec une simple peau de chèvre. [NDLC : ah, ben, *dis-donc* !] Didon eut l'idée de la découper en une fine lanière. Ainsi, ~~did-on~~ dit-on, fut fondée la ville de Carthage …]

Nous avons fait trois découpages différents d'une feuille qui mesurait en cm 20×28.

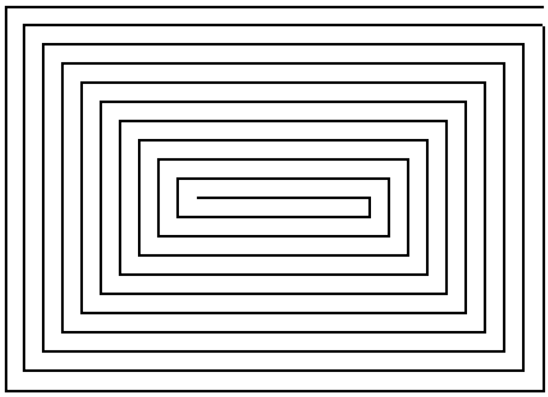

figure 1.

Le premier était en forme d'escargot (voir figure 1) et donnait un ruban. Le deuxième et le troisième étaient identiques (voir figures 2 et 3) mais on pliait la feuille soit en largeur soit en longueur. On obtenait un ruban “fermé” (contrairement au premier).

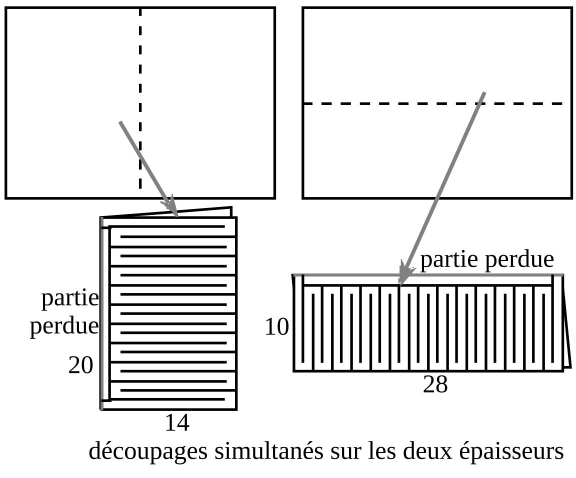

figure 2. *figure 3.*

Nous avons **mesuré** la longueur de chacun des rubans obtenus.

Nous avons trouvé que le découpage en escargot donnait un ruban plus long pour la même largeur.

La longueur est mesurée au milieu du ruban. [Note du chercheur : ce ne fut pas toujours le cas. Les mesures données ci-après correspondent à la longueur des traits de découpage qui bordent les lanières vers l'*intérieur* (on repère l'*intérieur* grâce aux « virages ».]

[Une définition précise de la largeur, suggérée par le chercheur, est :] la largeur d'une lanière est **le diamètre du plus grand disque qui peut circuler d'un bout à l'autre sans coincer** [= sans dépasser].

Ensuite nous avons essayé des largeurs différentes pour le même découpage. Nous avons obtenus les résultats suivants :

largeur de la lanière	**longueurs pour l' escargot**	**zig-zag en … … large**	**… long**
0,5 cm	1070,5	1016	992
1 cm	513	460	436
2 cm	234	188	164
3 cm	?	?	?

[Note du chercheur : intrigué par la perte d'une petite bande au centre, dans les découpages en zig-zag, je demandai, lors du quatrième séminaire, s'ils avaient essayé de couper jusqu'au pli. Cela n'avait pas été essayé : nous découpâmes ensemble, suivant les traits épais (voir figure 4.), pour une largeur de 1 cm.

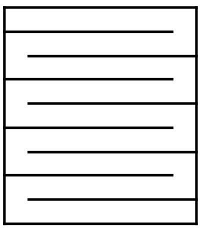

figure 4.

Nous avons obtenu une chaîne, puis, avec quelques coups de ciseaux de plus (essayez-donc !), un grand anneau de longueur 505 cm.]

Calculs.

1/ Une feuille de 28 × 20 cm pliée dans le sens de la largeur. On coupe des bandes de 1 cm.

12 cm × 17 = 204 13 cm × 2 = 26

204 + 26 = 230

230 × 2 = 460 cm

2/ Une feuille de 28 × 20 cm pliée dans le sens de la largeur. On coupe des bandes de 0,5 cm.

13,5 cm × 2 = 27 13 cm × 37 = 481

27 + 481 = 508

508 × 2 = 1016 cm

3/ Une feuille de 28 × 20 cm pliée dans le sens de la longueur. On coupe des bandes de 1 cm.

9 cm × 2 = 18 8 cm × 25 = 200

18 + 200 = 218

218 × 2 = 436 cm

4/ Une feuille de 28 × 20 cm pliée dans le sens de la longueur. On coupe des bandes de 0,5 cm.

9,5 cm × 2 = 19 9 cm × 53 = 477

19 + 477 = 496

496 × 2 = 996 cm

5/Une feuille de 28 × 20 cm découpée en escargot avec des bandes de 1 cm.

27 + 26 + 25 + … + 11 + 10 + 9 = 342
18 + 17 + 16 + … + 3 + 2 + 1 = 171

342 + 171 = 513 cm

6/Une feuille de 28× 20 cm découpée en escargot avec des bandes de 0,5 cm.

27 + 26,5 + 26 + …+ 9,5 + 9 + 8,5 = 700
19 + 18,5 + 18 + …+ 1,5 + 1 + 0,5 = 370,5

700 + 370,5 = 1070,5 cm

La ficelle.

[Note du chercheur : la question initiale était en quelque sorte le problème inverse du précédent … comment occuper le moins d’espace possible ?]

Nous avons enroulé une ficelle le plus étroitement possible.

figure 5.

Nous avons étudié le rapport entre la longueur de la ficelle et le diamètre du disque que nous avons obtenu.

☞ longueur (cm) diamètre (cm)

longueur (cm)	diamètre (cm)
100	2,5
150	3,5
200	4,5
300	?

[Note du chercheur : l’analogie entre le découpage de la feuille en escargot et l’enroulement de la ficelle n’a pas paru évidente aux enfants. Compte-tenu des difficultés des mesures de longueur des lanières et d’épaisseur (≈ largeur) des ficelles, la formulation d’une loi a vraiment posé problème. La conjecture suivante a paru finalement plausible, au vu des incertitudes des mesures et des définitions.]

Nous avons proposé la **conjecture** suivante :

☞ **si on multiplie la largeur par un nombre *k*, alors la longueur est divisée par le même nombre**.

Entourer la plus grande surface possible.

Ensuite nous avons cherché la plus grande surface qu’on pouvait entourer avec un ruban de longueur donnée.

Nous avons pris un ruban de 12 m.

Forme	dimensions	aire
Triangle équilatéral	côté 4m Hauteur 3,5m (*)	7m^2
Carré	côté 3m	9m^2
Rectangle	Longueur 4 m Largeur 2m	8m^2
Rectangle	Longueur 5 Largeur 1	5m^2
Disque	Rayon : 12 ÷ 6,28 environ 1,91m	$1{,}91 \times 1{,}91 \times 3{,}14$ environ 11,4m^2

(*) Nous avons mesuré sur une figure à l’échelle 1/100.

Nous avons proposé la **conjecture** suivante :

☞ **avec la même longueur de ruban, c’est en faisant un cercle qu’on entoure la plus grande surface.**

[Commentaire du chercheur : j’ai trouvé extrêmement intéressants les problèmes combinatoires sous-jacents aux procédés de découpage, de mesure et de calcul, ainsi que la manière très concrète dont a été abordé le sujet. Il faut souligner que la problématique initiale était très vaste : il s’agissait de savoir quelles mesures prendre d’un objet « biscornu » (une cafetière, par exemple) pour être certain de pouvoir l’envoyer par la poste (la règle, toujours en vigueur, est que la somme des trois dimensions d'un colis postal, hauteur + largeur + longueur, ne doit pas dépasser 1 m). Mais c'est l'histoire de la reine Didon qui a attiré leur attention et les a passionnés jusqu'au bout ! Ce thème de recherche, que les professionnels baptisent « problèmes isopérimétriques » est très actif et il traverse plusieurs spécialités des sciences physiques et mathématiques : torsion d'un fil métallique, propagation de la chaleur, géométrie intégrale (inégalités entre mesures), combinatoire des ensembles finis (codes correcteurs d'erreurs), etc.]