stratégie au jeu de pile ou face

par M. Régis Cottereau, M. Laurent Cottereau, M. Benjamin Renaud, M. François Pitie, élèves de 1°S du **lycée Buffon de Paris (75)**, établissement jumelé avec le **lycée La Fontaine de Paris (75)**

enseignante :
Mme Marie Lattuati, MM Lelarge, Moscovici

chercheur :
M. Gilles Godefroy

coordination article : —

Pas de compte-rendu de parrainage.

P — Stratégies dans les jeux de pile ou face. 23

Peut-on bien jouer à pile ou face ?

Les réponses que l'on peut donner à cette question, fondamentale en théorie probabiliste des jeux, dépendent du modèle mathématique avec lequel on explique les phénomènes aléatoires.

Sujet.

Un individu noté J joue à pile ou face contre la banque d'un casino. La pièce est non truquée, le joueur possède une somme a et la banque ne fait pas crédit.

L'objet du problème est de **montrer que quelle que soit sa stratégie,**

J **ne peut espérer gagner d'argent**.

On s'intéresse en premier au cas du joueur "horaire" : J joue un nombre n fixé de coups et sa mise a reste constante, égale à 1.

Notations, vocabulaire :

a : somme que possède le joueur initialement.

un **coup** : un lancer de pièce.

α : argent mis en jeu à chaque coup. Le joueur perd ou gagne α.

une **partie** : une succession de coups.

n : nombre de coups d'une partie.

g : gain, algébrique [c'est-à-dire avec son signe], représentant la différence entre la somme dont J dispose en fin de partie et la somme initiale.

$P_n(g)$: probabilité d'obtenir le gain g après n coups.

[NDLR : l'hypothèse faite dans le modèle est que $P_1(\alpha)= P_1(-\alpha) = 1/2$ et, plus généralement, que :

$$P_{n+1}(g-\alpha) = P_{n+1}(g+\alpha) = P_n(g) / 2.]$$

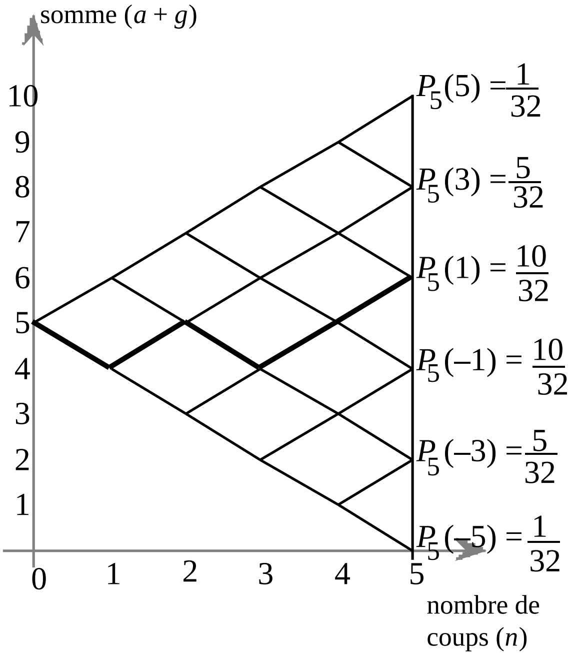
L'espérance de gain.

Définition et notation :

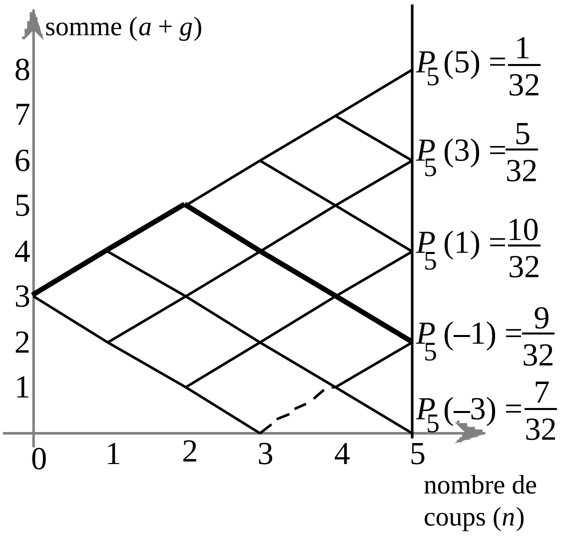
On appelle espérance de gain la somme des gains algébriques possibles en fin de partie, pondérés par leurs probabilités respectives. On la notera $E_n(g)$. [NDLR : malgré cette notation, courante pour une espérance en théorie des probabilités, la variable « g » n'apparaît pas vraiment dans son calcul (c'est une « variable muette »).]

Exemples [avec $\alpha = 1$] **:**

pour $n = 5$ et $a = 5$:



pour $n = 5$ et $a = 3$:



Ces graphiques représentent l'ensemble des chemins que J peut choisir en jouant n coups et avec une somme initiale de a (le trait en surimpression matérialise les pertes et les gains d'une partie quelconque de J).

En effet pour $P_5(-3)$ il faut considérer tous les cas où J n'a plus d'argent car $P_n(x)$ correspond à la probabilité d'avoir une somme de x après n coups.

Dans les deux cas on a :

$$E_5(g) = 5\, P_5(5) + 3\, P_5(3) + 1\, P_5(1) - 1\, P_5(-1) - 3\, P_5(-3) - 5\, P_5(-5),$$

soit :

$$E_5(g) = \sum_{k=0}^{5} (5-2k) P_5(5-2k)$$

car, dans le cas où $a = 3$, $P_5(-5) = 0$.

Calcul de l'espérance de gain.

Par définition :

$$E_n(g) = \sum_{k=0}^{n} (n-2k)P_n(n-2k).$$

Il apparaît clairement que les calculs seraient plus simples avec une somme [où k représenterait le gain du joueur J et donc] varierait entre $-n$ et n.

Pour la facilité des calculs et la lisibilité des formules il nous faut donc introduire une nouvelle notation :

$$\sum_{\substack{k=i \\ (\sigma=p)}}^{j} X$$

qui correspond, pour l'indice de sommation k, à une incrémentation d'un pas de p unités au lieu de 1 dans le cas d'une sommation du type:

$$\sum_{k=i}^{j} X.$$

Ainsi :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ (\sigma=2)}}^{10} k = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 :$$

il s'agit en fait de la somme des entiers pairs de 0 à 10.

Il faut cependant être attentif sur un cas particulier : lorsque $p - i$ n'est pas un nombre entier de pas. Dans ce cas, k ne prend pas la valeur n. Ainsi :

$$☞ \quad \sum_{\substack{k=0 \\ (\sigma=2)}}^{9} k = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20.$$

Ceci fait, on peut écrire l'espérance de gain avec cette nouvelle notation :

$$E_n(g) = \sum_{\substack{g=-n \\ (\sigma=2)}}^{n} gP_n(g).$$

Or $P_n(g) = (1/2)\,[P_{n-1}(g-1) + P_{n-1}(g+1)]$; on a donc la relation :

$$E_n(g) = (1/2) \sum_{\substack{g=-n \\ (\sigma=2)}}^{n} g[P_{n-1}(g-1)+P_{n-1}(g+1)]$$

$$E_n(g) = (1/2) \sum_{\substack{g=-n+1 \\ (\sigma=2)}}^{n-1} (g-1+g+1)P_{n-1}(g) + (1/2)\,[nP_{n-1}(n) - nP_{n-1}(-n)].$$

Or on remarque que :

$$(1/2)\,[nP_{n-1}(n) - nP_{n-1}(-n)] = 0$$

car

$$P_{n-1}(n) = 0 \text{ et } P_{n-1}(-n) = 0$$

$$\Rightarrow E_n(g) = \sum_{\substack{g=-n \\ (\sigma=2)}}^{n} gP_n(g) = \sum_{\substack{g=-n+1 \\ (\sigma=2)}}^{n-1} gP_n(g).$$

Par récurrence, on obtient :

$$E_n(g) = \sum_{\substack{g=-1 \\ (\sigma=2)}}^{1} gP_1(g) = (1/2)\,(1-1) = 0.$$

et finalement :

$$☞ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, a \in \mathbb{N}^*, E_n(g) = 0.$$

Généralisation.

L'intérêt de la démonstration précédente réside dans l'étude au coup par coup.

En utilisant une méthode similaire, on pourrait démontrer le résultat obtenu pour un cas plus général, en tenant compte de toutes les stratégies possibles et non plus uniquement de celle du "joueur horaire". Premièrement, il nous faut noter tous les paramètres qui permettent d'obtenir des stratégies différentes :

1- soit J s'arrête (volontairement ou involontairement), soit J continue ;

2- J décide de changer sa mise α.

Tous les autres cas sont indépendants de la volonté de J.

On note $E_n(g_n)$ l'espérance de gain après n coups. [NDLR : le gain g_n après n coups intervient dans le calcul des probabilités mais pas, comme nous l'avons remarqué plus haut, dans celui de l'espérance. Nous avons donc choisi de restituer ci-dessous la notation précédente, soit $E_n(g)$ pour l'espérance, en ajoutant quelques précisions au texte des élèves.]

si *J* joue :

$$P_n(g_n) = (1/2)\,[P_{n+1}(g_n+\alpha) + P_{n+1}(g_n-\alpha)]$$

car si J gagne, alors $g_{n+1} = g_n + \alpha$
si J perd, alors $g_{n+1} = g_n - \alpha$

$\Rightarrow E_n(g) = (1/2)\,[E_{n+1}(g)+\alpha + E_{n+1}(g)-\alpha]$

$\Rightarrow E_n(g) = E_{n+1}(g)$

si *J* ne joue pas :

$E_n(g) = E_{n-1}(g)$: J conserve le même gain qu'au coup $n-1$.

[Dans tous les cas :]

$$\forall\, n \in \mathrm{N}^*, \forall\, \alpha \in \mathrm{R}, E_n(g) = E_{n-1}(g).$$

Or on a :

$$E_1(g) = (1/2)\,[\alpha + (-\alpha)] = 0 \Rightarrow E_n(g) = 0$$

D'où on en déduit que quelle que soit la stratégie utilisée **à pile ou face** on a la relation :

☞ $\forall\, n \in \mathrm{N}^*, \forall\, a \in \mathrm{N}^*, \forall\, \alpha \in \mathrm{R}, E_n(g) = 0.$

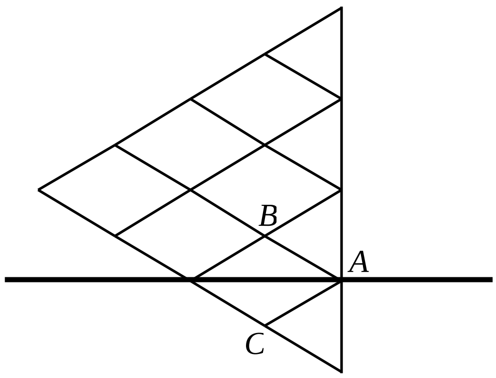
....

[NDLR : ci-après, les élèves ne s'intéressent plus au gain du joueur, mais à son espoir de durer dans la partie. Les calculs sont faits pour un joueur “horaire” dont la mise à chaque coup est 1. Si la banque autorisait l'endettement, le joueur pourrait continuer à jouer, même avec un avoir momentanément négatif. Mais la banque ne fait pas de crédit : le joueur cesse d'être joueur lorsque son avoir est nul. C'est ce à quoi se réfèrent les élèves lorsqu'ils parlent de chemins « en pouvant s'endetter » et de chemins « sans s'endetter ».]

L'espérance de vie.

Définition : On appelle espérance de vie la moyenne des nombres de **coups** joués pondérés par leurs probabilités respectives, qui sera notée $E_{\text{vie}}(n)$. [NDLR : ainsi, $E_{\text{vie}}(n)$ est le nombre moyen **de coups effectivement joués** pour une partie en n coups.]

Calcul de l'espérance de vie :



$P_n(A)$ = Probabilité de ne plus avoir d'argent après n coups.

$P_n(A) = (1/2^n) \times$ nombre de chemins qui passent par A sans s'endetter $= (1/2^n) \times$ nombre de chemins qui passent par B sans s'endetter $= (1/2^n) \times (\mathit{ndcqppBepse} - \mathit{ndcqppCepse})$.

[NDLC : je note *ndcqppAepse* = nombre de chemins qui passent par A en pouvant s'endetter (*ndcqppBepse*, *ndcqppCepse* = nombre de chemins qui passent par B, par C en pouvant s'endetter) pour éviter des formules de trois pages chacune.]

$$\mathit{ndcqppBepse} = C_{n-1}^{\frac{n-a}{2}}$$

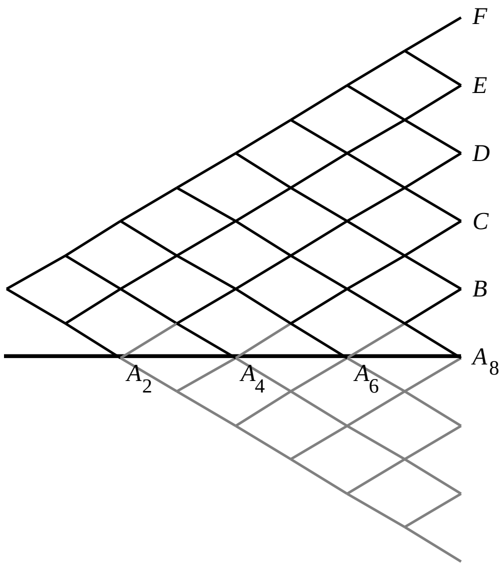
$$\mathit{ndcqppCepse} = C_{n-1}^{\frac{n-a}{2}-1} = C_{n-1}^{n-1-(\frac{n-a}{2}-1)}$$

$$= C_{n-1}^{\frac{n+a}{2}}$$

$$P_n(A) = \frac{C_{n-1}^{\frac{n-a}{2}-1} - C_{n-1}^{\frac{n+a}{2}}}{2^n} = \frac{a}{n} \times \frac{C_n^{\frac{n-a}{2}}}{2^n}$$

(*cf.* ANNEXE)

Espérance de vie :



(les traits en pointillé représentent les chemins impossibles)

$E_{\text{vie}}(8) = 2\times P_2(A_2) + 4\times P_4(A_4) + 6\times P_6(A_6) + 8 \times [1 - P_2(A_2) - P_4(A_4) - P_6(A_6)]$.

$E_{\text{vie}}(8) = n - [6\times P_2(A_2) + 4\times P_4(A_4) + 2\times P_6(A_6)]$

$E_{\text{vie}}(8) = 5{,}84$

$$E_{\text{vie}}(n) = n - a \sum_{\substack{k=a \\ (\sigma=2)}}^{n} (n-k)\times P_k(A_k)$$

$$☞\ E_{\text{vie}}(n) = n - a \sum_{\substack{k=a \\ (\sigma=2)}}^{n} \frac{(n-k)\times \mathrm{C}_k^{\frac{k-a}{2}}}{k\times 2^k}$$

Etude de la limite de l'espérance de vie :

On veut savoir pour n infini si l'espérance de vie converge ou diverge.

On considère que J joue autant qu'il le peut.

Soit $E_{\text{vie}}[a]$ l'espérance de vie en fonction uniquement de a (car n est par hypothèse infini). $E_{\text{vie}}[a]$ est toujours représenté par la formule ci-dessus car le fait que n soit infini n'intervient en rien dans la définition de l'espérance de vie.

[NDLR : l'interprétation des expressions probabilistes est toujours délicate et dépend du modèle choisi. Pour faciliter la lecture du texte des élèves, nous avons fait l'hypothèse que la limite de $E_{\text{vie}}(n)$ existe lorsque n tend vers l'infini et avons noté $E_{\text{vie}}[a]$ la valeur de cette limite : notez que $E_{\text{vie}}(n)$ dépendait à la fois de n et de a, tandis que $E_{\text{vie}}[a]$ ne dépend plus que de a.]

Si $E_{\text{vie}}[a]$ est fini alors ce nombre correspondra au nombre de coups que J pourra espérer jouer avec une somme de a.

Lorsque J possède une somme a il a deux possibilités :
- Il perd et possède désormais une espérance de $E_{\text{vie}}[a-1]$.
- Il gagne et possède une nouvelle espérance de $E_{\text{vie}}[a+1]$.

On a donc la relation ~~pour *n* infini~~ :

$$E_{\text{vie}}[a] = (1/2)\left(E_{\text{vie}}[a-1] + 1\right) + (1/2)\left(E_{\text{vie}}[a+1] + 1\right)$$

On ajoute +1 car dans les deux cas J aura joué un coup supplémentaire. Et donc :

$$☞\ E_{\text{vie}}[a] = (1/2)\left(E_{\text{vie}}[a-1] + E_{\text{vie}}[a+1]\right) + 1$$

Remarque : Ce résultat, qui peut paraître surprenant, est vérifié par des exemples numériques pour des valeurs de n très grandes.

On va chercher à écrire $E_{\text{vie}}[a]$ en fonction de $E_{\text{vie}}[1]$ … [à partir de la propriété précédente, nous allons étudier la propriété Q_a :

$$E_{\text{vie}}[a] = a.(E_{\text{vie}}[1]-a+1)$$

Q_1 : $E_{\text{vie}}[1] = E_{\text{vie}}[1]$. Démontrons que Q_a implique Q_{a+1} :

$$Q_a : E_{\text{vie}}[a] = a.E_{\text{vie}}[1] - a(a-1)$$

$$E_{\text{vie}}[a] = (1/2)\,\big(E_{\text{vie}}[a+1] + E_{\text{vie}}[a-1]\big) + 1$$
$$\Leftrightarrow E_{\text{vie}}[a+1] = 2.E_{\text{vie}}[a] - E_{\text{vie}}[a-1] - 2$$

$$Q_a \Leftrightarrow E_{\text{vie}}[a+1] = 2.\big(a.E_{\text{vie}}[1] - a(a-1)\big) - \big((a-1).E_{\text{vie}}[1] - (a-1)(a-2)\big) - 2$$

$$Q_a \Leftrightarrow E_{\text{vie}}[a+1] = (2a-a+1).E_{\text{vie}}[1] - 2a.(a-1) + (a-1)(a-2) - 2$$

$$Q_a \Leftrightarrow E_{\text{vie}}[a+1] = (a+1).E_{\text{vie}}[1] - a^2 - a$$

$$Q_a \Leftrightarrow E_{\text{vie}}[a+1] = (a+1).E_{\text{vie}}[1] - a.(a+1)$$

$$Q_a \Leftrightarrow Q_{a+1}$$

On vient de démontrer par récurrence que :

$$☞\ E_{\text{vie}}[a] = a.E_{\text{vie}}[1] - a(a-1).$$

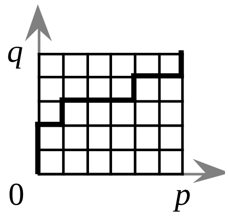
Cela s'écrit : $E_{\text{vie}}[a] = a.(E_{\text{vie}}[1]-a+1)$. Or il existe a tel que $E_{\text{vie}}[1]-a+1 < 0$ et donc $E_{\text{vie}}[a] < 0$. Mais comme J joue de toute façon au moins a coups, on en déduit que l'espérance de vie ne peut être finie, elle est donc infinie.

$$☞\ \lim_{n\to+\infty} \big(E_{\text{vie}}(n)\big) = +\infty$$

[NDLR : en toute rigueur, ce qui a été prouvé c'est que l'hypothèse faite était absurde, autrement dit que $E_{\text{vie}}(n)$ ne peut avoir de limite finie pour toute somme initiale a. L'interprétation de ce résultat en termes de longueur du jeu à pile ou face reste sans doute à faire. Il est en tout cas intéressant de constater que le concept d'espérance permet des calculs et des raisonnements qui auraient été difficiles à mener directement à l'aide des seules probabilités d'évènements élémentaires …] [NDLC : si vous ne connaissez pas les « C » et « ! » sautez l'annexe.]

•••••••••••••••••••• Annexe : Calcul de $P_n(A)$.

[NDLR : les calculs s'appuient sur le fait que le nombre de chemins croissants (formés de segments de longueur unité, horizontaux ou verticaux) issus de l'origine (0, 0) et se terminant au point (p, q) de la grille est exactement :



$$C_{p+q}^{p}\ .]$$

$$\frac{C_{n-1}^{\frac{n-a}{2}} - C_{n-1}^{\frac{n+a}{2}}}{2^n} = \frac{N}{2^n} \Leftrightarrow$$

$$N = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-a}{2}\right)!\left(n-1-\left(\frac{n-a}{2}\right)\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+a}{2}\right)!\left(n-1-\left(\frac{n+a}{2}\right)\right)!}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-a}{2}\right)!\left(\frac{n+a}{2}-1\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+a}{2}\right)!\left(\frac{n-a}{2}-1\right)!}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{(n-1)!\left(\frac{n+a}{2}\right) - (n-1)!\left(\frac{n-a}{2}\right)}{\left(\frac{n-a}{2}\right)!\left(\frac{n+a}{2}\right)!}$$

car $n! = n.(n-1)!$

$$\Leftrightarrow N = \frac{a.(n-1)!}{\left(\frac{n-a}{2}\right)!\left(\frac{n+a}{2}\right)!}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{a.n!}{n.\left(\frac{n-a}{2}\right)!\left(\frac{n+a}{2}\right)!}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{a}{n} \times C_n^{\frac{n-a}{2}}$$

On a donc $P_n(A) = \dfrac{a.C_n^{\frac{n-a}{2}}}{n.2^n}$.