

billards lumineux

par M. Jean-Baptiste Jacob, M. Guillaume Hubin, M. Jérôme Jouvent, élèves de TS du **lycée Buffon de Paris (75)** et M. Pablo Serrano, M. Jean-François Vischi, élèves de 2nde du **lycée La Fontaine de Paris (75)**

enseignantes :

Mmes Ghislaine Gaudemet, Marie Lattuati

chercheur :

M. Gilles Godefroy

coordination article : Jouvent Jérôme

compte-rendu de parrainage :

Comment savoir si le parcours d'un rayon réfléchi dans un polygone quelconque (rectangle, triangle, cercle ...) sera fermé ? Est-ce que tout point du périmètre de ce polygone sera atteint ? Qu'en est-il pour les points intérieurs ? Pour le cas d'un rectangle, ils ont démontré à l'aide de symétries et d'un pavage de cette figure que pour obtenir un parcours fermé il faut $\tan \alpha \in \mathbb{Q}$ où α représente l'inclinaison par rapport à l'horizontale du départ du rayon.

Même conclusion pour le cercle en considérant l'angle au centre. Pour un angle différent, le rayon passe par tous les points du rectangle ou de la couronne d'un rayon r dépendant de l'angle au centre pour le cercle.

NCES — Les billards lumineux : carré, rectangle et cercle ...

13

Le billard mathématique est aussi un moyen d'étudier les propriétés fines d'un nombre particulier, représentant, par exemple, la direction d'envoi d'un rayon lumineux qui sera réfléchi par les bords. Lorsque le nombre est choisi "au hasard", on s'attend à ce que la trajectoire passe presque partout.

Introduction.

Définitions :

- Trajectoire refermée : un faisceau qui possède une trajectoire refermée est un faisceau qui revient à son point de départ après « n » rebonds à l'intérieur d'un polygone. ($n \in \mathbb{N}$)
- Trajectoire dense : un faisceau qui possède une trajectoire dense est un faisceau dont la trajectoire traverserait n'importe quelle surface du polygone, aussi infiniment petite soit-elle.

Problèmes :

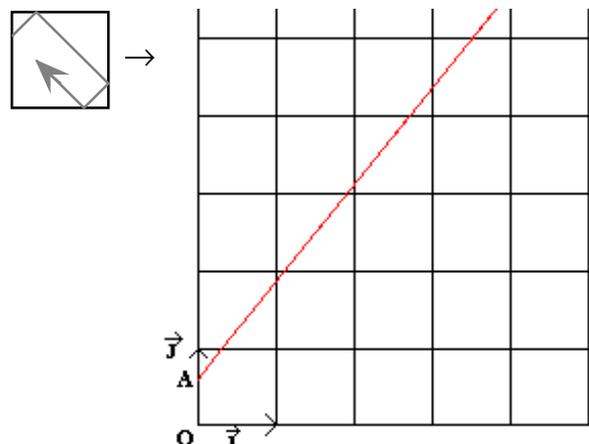
- La trajectoire d'un faisceau à l'intérieur d'un polygone quelconque, peut-elle se refermer et, si oui, sous quelle(s) condition(s) ?
- Dans quel(s) cas une trajectoire est dense (c'est-à-dire : passe près de tout point. cf $\forall \epsilon$) ?

Dans un premier temps nous limiterons notre étude aux carrés et rectangles puis nous nous pencherons sur le cas plus complexe des cercles (assimilables à des polygones réguliers ayant une infinité de côtés).

Le carré.

Etude des conditions pour que la trajectoire du faisceau se ferme.

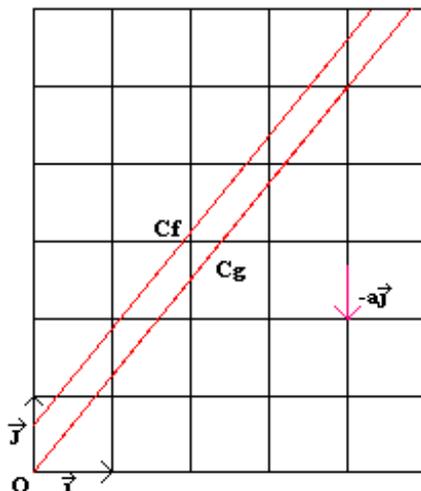
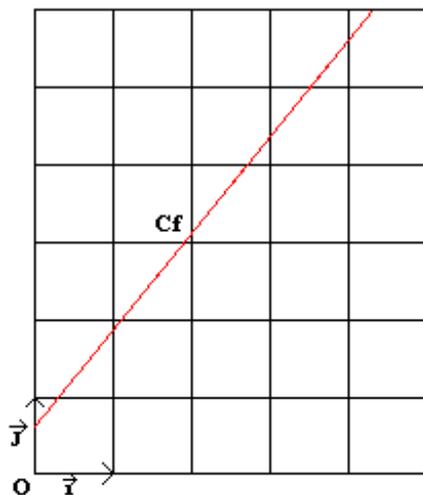
Soit une trajectoire d'un faisceau dans un carré. Cette trajectoire, par développements successifs des carrés à l'aide de symétries axiales, peut-être ramenée à une demi-droite dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé.



[NDLR : il est à noter que l'orientation change à chaque symétrie ; un tracé qui, sur le quadrillage, se répète, ne correspond à une trajectoire fermée que si l'orientation du carré où a lieu la répétition est la même que celle du premier carré.]

Le cas ci-dessus est général. L'origine de la demi-droite Cf , et donc le point de départ de la trajectoire du faisceau, sera l'ordonnée à l'origine « a ».

On cherche tous les points du quadrillage tels que dans le carré, la trajectoire se referme ; [cela revient, comme on peut le montrer, à chercher les points $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ du quadrillage tels que le point $(k, m+a)$ appartienne à la demi-droite Cf].



[NDLR : les élèves introduisent l'équation $y = f(x)$ de Cf , avec $x \geq 0$, et montrent que la demi-droite Cg d'équation $y = g(x)$, $x \geq 0$, où $f(x) = g(x) - a$, est l'image de Cf par la translation de vecteur $-a\vec{j}$ (voir figure). Ils en déduisent la reformulation suivante :]

Finalement, pour résoudre le problème (rappel : on cherche tous les points du quadrillage tels que dans le carré, la trajectoire se referme), on peut donc se ramener à l'étude de Cg .

Cherchons dans quelles conditions la trajectoire se referme ?

La trajectoire se referme dans le carré, si la demi-droite d'origine O passe par un point du quadrillage de coordonnées (k, m) . Or k et m sont des entiers, donc le coefficient directeur de la demi-droite est le quotient de deux entiers : m / k . Le coefficient doit donc être rationnel \forall pour que la trajectoire se referme.

Démontrons maintenant que lorsque le coefficient de la droite est rationnel alors la trajectoire se referme.

Soit $\vec{u}(1, q/p)$ avec $(q, p) \in \mathbb{N}^2$, un vecteur directeur de la demi-droite dont le coefficient directeur est le rationnel q/p .

L'équation de la droite est donc :

$$y = (q/p) \times x, \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+.$$

Or tous les points $M(kp, kq)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ vérifient cette équation.

[L'orientation des carrés dont les coordonnées du coin « sud-ouest » sont paires est la même que celle du premier carré et donc, quitte à considérer $M(2p, 2q)$,] la trajectoire se referme.

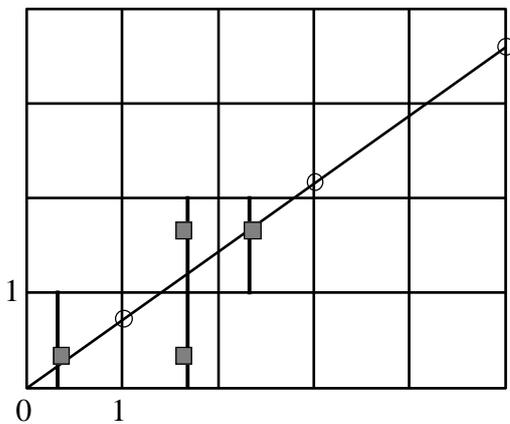
Remarque : lorsque l'abscisse [ou l'ordonnée] du point M sera impaire, on obtiendra une moitié de trajectoire fermée. Il suffira par la suite de doubler l'abscisse [ou l'ordonnée] du point M pour obtenir une trajectoire fermée.

En définitive :

☞ Pour tout coefficient directeur rationnel \mathbb{W} de la demi-droite, la trajectoire se referme ; pour tout coefficient directeur irrationnel de la demi-droite la trajectoire ne se referme pas.

Trajectoire dense dans le carré.

Soit θ l'angle de départ. Il s'agit d'étudier le cas où $\alpha = \tan \theta$ est irrationnel ; on sait que la trajectoire alors ne se referme pas. [Nous voulons savoir si la trajectoire « remplit » le carré ;] il suffit à nouveau d'étudier la trajectoire dépliée.



[Par définition,] la trajectoire est dense \mathbb{W} dans le carré si et seulement si n'importe quelle surface S , aussi petite soit-elle est traversée par la trajectoire. [Pour cela, il revient au même de chercher si l'une des images de S] peut être traversée par la trajectoire dépliée.

Il suffirait donc que les points d'impact de la trajectoire dépliée sur un segment (et ses images) parallèle, de même longueur que l'un des côtés du carré, et traversant la dite surface constituent un ensemble dense. A titre d'exemple, la surface et ses images sont représentées en gris et les segments en trait plus épais.

On étudiera les points d'impact sur l'un des côtés du carré représentés sur le dessin (il suffirait d'une translation pour étudier tous les autres cas ou de modifier légèrement les

coordonnées qui vont suivre). [NDLR : un argument géométrique, tenant compte des réflexions sur le bord vertical droit du carré initial, serait peut-être plus simple. Il faudrait en tout cas tenir compte de l'orientation des carrés et donc ne considérer que les segments verticaux d'abscisses impaires (comme sur la figure) ou d'abscisses paires.]

Le déplacement vertical à chaque rebond est alors de α . Tous les points d'impact ont pour coordonnées $(n, n\alpha)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Les coordonnées des points d'impact dans $[0, 1]$ sont de la forme $x_n = n\alpha - E(n\alpha)$ [où $E(n\alpha)$ désigne la partie entière de $n\alpha$].

Le problème est de savoir désormais si l'ensemble des x_n est dense dans $[0, 1]$... [autrement dit ... si tout intervalle de $[0, 1]$ contient un des nombres x_n].

[NDLC : les notations \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sont définies dans la partie **Notations** qu'on trouvera en deuxième page de couverture.]

Démontrons successivement :

❖ $\mathbf{E} = \{k\alpha + p, \text{ où } (k, p) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}$,
avec $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, est un sous-
groupe additif de \mathbf{R} .

❖ \mathbf{E} est dense.

❖ L'ensemble des x_n est dense dans
[0, 1].

❖ \mathbf{E} est un sous-groupe additif de \mathbf{R} .

Principe : $(\mathbf{E}, +)$ est un sous-groupe additif de
 \mathbf{R} si et seulement si :

◆ $\mathbf{E} \neq \emptyset$

◆ $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}$

◆ $\forall x \text{ et } y \in \mathbf{E} \text{ alors } x - y \in \mathbf{E}$

Soit α un réel fixé et $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

$$\mathbf{E} = \{k\alpha + p, \text{ où } (k, p) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}$$

◆ $\mathbf{E} \neq \emptyset$ est vrai, sinon le problème ne se
poserait pas.

◆ $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}$; démonstration :

$\forall x \in \mathbf{E} \quad x = k_x\alpha + p_x$ par définition
or k_x et $p_x \in \mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$,
d'où $x \in \mathbf{R}$

◆ $\forall x, y \in \mathbf{E}$ alors $x - y \in \mathbf{E}$. Démonstration :

Soit $x \in \mathbf{E}$ tel que $x = k_x\alpha + p_x$.
Soit $y \in \mathbf{E}$ tel que $y = k_y\alpha + p_y$

alors $x - y = k_x\alpha + p_x - k_y\alpha - p_y$
 $= (k_x - k_y)\alpha + (p_x - p_y)$

or $k_x, k_y, p_x, p_y \in \mathbf{Z}$ par hypothèse,

d'où $k_x - k_y = K \in \mathbf{Z}$
et $p_x - p_y = P \in \mathbf{Z}$.

Donc $x - y = K\alpha + P$ avec K et $P \in \mathbf{Z}$;
donc $x - y \in \mathbf{E}$.

Les trois conditions étant vérifiées, \mathbf{E} est un
sous-groupe additif de \mathbf{R} .

❖ Démontrons que \mathbf{E} est dense dans [0, 1]
en utilisant le :

Théorème : Tout sous-groupe additif de \mathbf{R}
est soit dense, soit du type :

$$a \times \mathbf{Z} = \{a \times t \text{ où } t \in \mathbf{Z}\}, \text{ avec } a \in \mathbf{R}.$$

Supposons que le sous-groupe additif \mathbf{E} soit
du type $a \times \mathbf{Z}$. Soit x et y deux éléments de \mathbf{E} ,
différents, et non nuls.

$x = k_x\alpha + p_x = a \times t_x$ où $k_x, t_x, p_x \in \mathbf{Z}$. D'où
 $a = (k_x\alpha + p_x) / t_x$

et $y = k_y\alpha + p_y = a \times t_y$ où $k_y, t_y, p_y \in \mathbf{Z}$. D'où
 $a = (k_y\alpha + p_y) / t_y$

d'où $(k_x\alpha + p_x) / t_x = (k_y\alpha + p_y) / t_y$

$$\Leftrightarrow \alpha (k_x t_y - k_y t_x) / (t_x t_y) = (p_y t_x - p_x t_y) / (t_x t_y)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = (p_y t_x - p_x t_y) / (k_x t_y - k_y t_x)$$

or α est un irrationnel ; il y a une contradic-
tion, l'hypothèse de départ est fausse. \mathbf{E} est
un sous-groupe additif de \mathbf{R} dense.

❖ Cela a été démontré, mais pas encore mis
en forme. [NDLR : les idées précédentes peu-
vent être appliquées à l'ensemble

$$\{x_n + p, (k, p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}\} ;$$

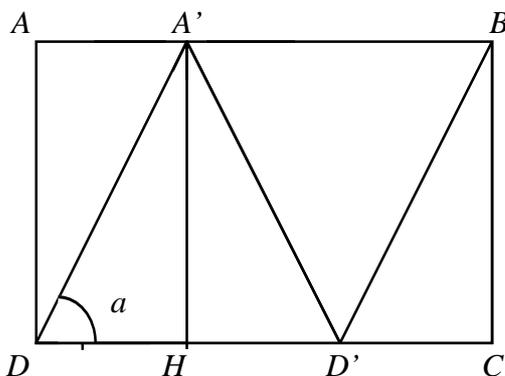
mais, compte-tenu de la remarque déjà faite
plus haut, il faudrait en fait considérer les x_n
pour n pair, ou les x_n pour n impair, pour
avoir la conclusion recherchée de densité de
la trajectoire dans le carré.]

Polygone de lumière. Etude d'un cas particulier dans le rectangle.

Soit un faisceau de rayons lumineux partant d'un angle du rectangle $ABCD$ avec un angle d'incidence a . Le faisceau se réfléchit sur les parois du rectangle.

On cherche les dimensions de la plus grande surface incluse dans le rectangle qui ne soit traversée par aucun rayon.

❖ **cas 1** : le faisceau traverse une fois le rectangle $ABCD$ de largeur l et longueur L .



Quand n'a-t-on qu'une seule traversée du faisceau ? Le circuit du faisceau lumineux est fermé si et seulement s'il heurte un angle du rectangle en B ou C .

Soit H projeté orthogonal de A' sur DC . On a donc $k \times DH = DC$ avec k entier naturel.

Calcul de l'aire \mathfrak{a} de la plus grande surface intacte :

$$\mathfrak{a} = \text{aire}(DA'D') = (A'H \times DD')/2$$

Or $\tan a = A'H/DH$ d'où $DH = l / \tan a$ et $DD' = 2DH$ donc $DD' = 2l / \tan a$.

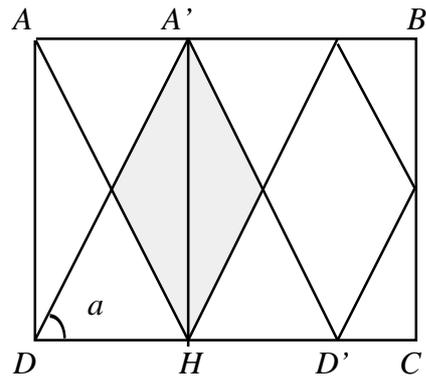
On a donc :

$$\Rightarrow \mathfrak{a} = l^2 / \tan a.$$

❖ **cas 2** : le faisceau traverse deux fois le rectangle.

Quand a-t-on deux traversées ?

Si $k \times DH = L$ avec $2k \in \mathbb{N}^*$.



Calcul de l'aire de la plus grande surface :

$$\mathfrak{a} = (A'H \times DH)/2.$$

Or $A'H = l$ et $DH = l / \tan a$. On a donc :

$$\Rightarrow \mathfrak{a} = l^2 / (2 \tan a)$$

Résultats pour n traversées (cas d'un passage exclu) :

On a $k \times DH = L$ avec $nk \in \mathbb{N}^*$.

Soit \mathfrak{a} l'aire la plus grande d'un losange de hauteur y et de largeur x .

[NDLR : des conditions supplémentaires sur n et k s'avèrent nécessaires pour avoir n « traversées » ainsi qu'une aire intacte en forme de losange.]

$y = 2l / n$ et $x = DD' / n$. On a donc :

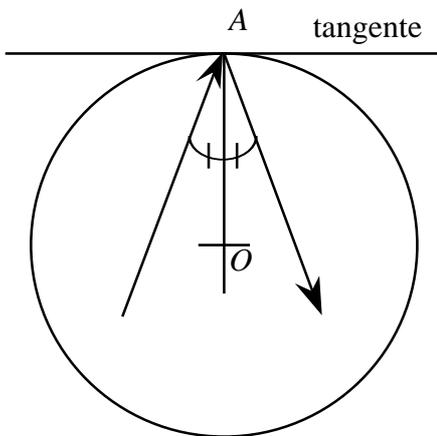
$$\Rightarrow \mathfrak{a} = 2 l^2 / (n^2 \times \tan a).$$

Le cercle.

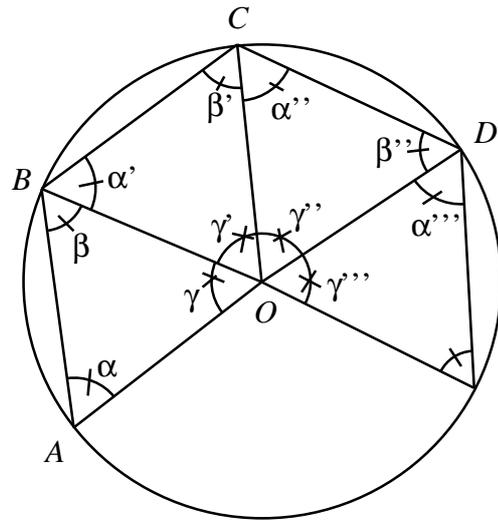
Problème : Comment doit-on choisir l'angle de départ d'un faisceau lumineux dans un disque pour que ce faisceau atteigne toute surface du cercle, aussi petite soit-elle ?

(Note: les arcs seront représentés entre guillemets[" "]).

☞ On considère que le faisceau réagit de cette façon :



Comment le faisceau se propage-t-il ?



Soit le cercle $C(O, OA)$.

Soit A le point d'origine du faisceau, B le second point du faisceau, C le troisième point du faisceau, D le quatrième ... Le faisceau rebondit de telle façon que $\beta = \alpha'$.

Comme le triangle OAB est formé de deux rayons OA et OB , il est isocèle en O . Donc $\alpha = \beta$. On applique le même raisonnement pour le triangle OBC et le triangle OCB : $\alpha' = \beta'$ et $\alpha'' = \beta''$. D'après les lois de la réflexion : $\beta = \alpha'$, $\beta' = \alpha''$. Donc, en fait :

$$\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = \alpha'' = \beta''.$$

$$\gamma = 180 - 2\alpha, \gamma' = 180 - 2\alpha', \gamma'' = 180 - 2\alpha''$$

Comme $\alpha = \alpha' = \alpha''$:

$$\gamma = \gamma' = \gamma''.$$

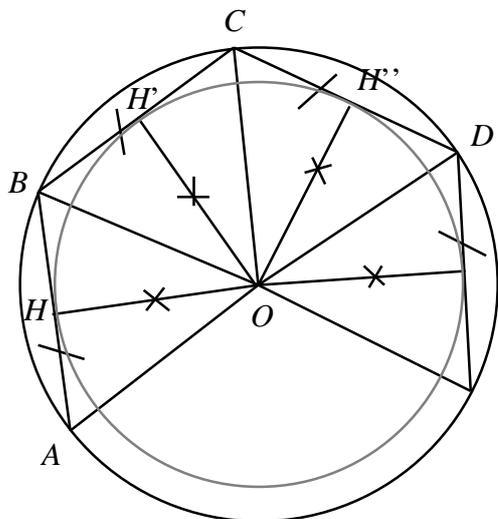
$OA = OB = OC = OD$ car ce sont des rayons de C . Les triangles OAB , OBC et OCD ont donc deux côtés et deux angles égaux, on peut en déduire que les triangles OAB , OBC et OCD sont égaux, donc :

$$AB = BC = CD.$$

Conclusion :

Le trajet du faisceau est donc constant, c'est-à-dire que tous les segments formés par deux rebonds consécutifs du faisceau sont égaux.

Quelle zone le faisceau ne peut-il jamais atteindre ?



Soit OH la hauteur de OAB issue de O . Soit OH' hauteur de OBC issue de O . Soit OH'' la hauteur de OCD issue de O .

Il a déjà été démontré que tous les triangles formés par deux points consécutifs du faisceau et le centre du cercle sont égaux ; on peut donc affirmer que toutes les hauteurs de ces triangles sont égales. Comme la distance la plus courte entre un point et une droite est la perpendiculaire à cette même droite qui passe par ce point :

H est le point de AB le plus proche de O .

H' est le point de BC le plus proche de O .

H'' est le point de CD le plus proche de O .

$$OH = OH' = OH''.$$

Comme OH est la distance la plus courte qui sépare O de n'importe quel segment du faisceau, on peut tracer un cercle $C'(O, OH)$ dans lequel le faisceau ne pénètre jamais. Le faisceau ne peut donc jamais atteindre n'importe quelle surface du disque C : la trajectoire n'est pas dense dans C].

Mais poussons l'étude plus loin.

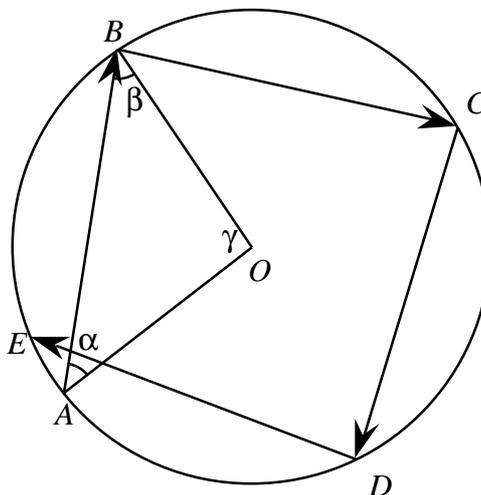
Le faisceau peut-il atteindre n'importe quelle surface de la couronne délimitée par les deux cercles C et C' ?

Si le faisceau réussit à atteindre n'importe quelle surface de la couronne, aussi petite soit-elle, on dira que le faisceau est dense dans la couronne.

Tout d'abord, nous allons essayer de voir si le faisceau peut être dense sur le cercle C , c'est-à-dire s'il atteint n'importe quel arc du cercle C , aussi petit soit-il.

Si le trajet du faisceau est fermé, il atteint un nombre fini de points. Soit A et B deux points consécutifs du faisceau sur le cercle C . Soit $C \in "AB"$; $C \neq A$; $C \neq B$. Soit $D \in "AB"$; $D \neq A$; $D \neq B$. Le faisceau n'atteindra pas l'arc " CD ", donc le faisceau ne sera pas dense sur C .

Donc, si le faisceau est dense sur le cercle, on est sûr que le circuit n'est pas fermé ; seulement ... comment choisir un angle de départ pour être sûr qu'il engendrera un trajet ne se refermant jamais ?



Soit p le nombre de segments différents du faisceau (lorsque le faisceau est en C , $p = 2$).

Soit k le nombre de tours complets avant que le circuit ne se referme (lorsque le faisceau est tel que E est en A , $k = 1$).

$$k \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*.$$

Pour que le faisceau soit fermé, il faudrait que : $p \times \gamma = 360^\circ \times k$, donc que :

$$\gamma = 360^\circ \times k / p.$$

$k \in \mathbb{N}^*$ donc $360 \times k \in \mathbb{Z}^*$.
 $p \in \mathbb{N}^*$ donc $\gamma \in \mathbb{Q}^*$.

[Réciproquement, si γ , mesuré en degrés, est rationnel, la trajectoire se referme.]

☞ Pour que le circuit ne se referme jamais, il faut et il suffit que $\gamma \neq 360^\circ \times k / p$ donc que γ soit irrationnel, donc que $\gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. (Si $\gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ aussi.)

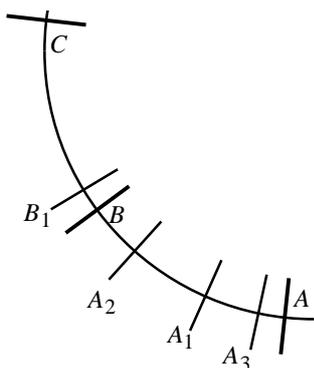
Si le circuit ne se referme pas, le faisceau est-il dense sur le cercle C ?

[NDLR : les élèves étudient comment se présentent successivement les points de réflexion du faisceau qui sont sur l'arc de cercle "AB" délimité par un trajet élémentaire du faisceau :]

Soit A et B deux points consécutifs du faisceau (non fermé). Le faisceau atteint consécutivement les points A et B, puis C. Il effectue un tour complet et finit par atteindre A₁.

Nous savons que le trajet du faisceau est constant donc lorsque le faisceau aura fait un tour complet et atteindra A₂, "AA₁" = "A₁A₂" vu que A₁ aurait pu être le point A d'origine et le faisceau aurait évolué de la même façon. Le faisceau effectue de nouveau un tour complet [(dans notre exemple ; plusieurs tours en général)] et atteint B₁ ; on a donc

$$"AA_1" = "A_1A_2" = "A_2B_1".$$



Si le faisceau a atteint B₁, c'est qu'il a d'abord atteint A₃.

$$\begin{aligned} "A_3B_1" &= "AB" \text{ donc } "AA_3" = "BB_1" \\ "A_2B_1" &= "AA_1" \\ "A_2B_1" - "BB_1" &= "AA_1" - "AA_3" \\ "A_2B" &= "A_3A_1" \\ "AA_2" + "A_2A_1" &= "AA_1" \\ "A_2B" + "AA_3" &= "AA_1" \end{aligned}$$

La distance des points [successifs] du faisceau sur l'arc "AB" est donc constante.

Maintenant, imaginons que le cercle C est une ficelle. On pourrait découper à l'aide d'une paire de ciseaux l'arc de cercle "AB". Nous nous retrouverions avec un bout de ficelle ; nous pourrions alors rejoindre les deux extrémités et former un cercle C_i dans lequel les points A et B seraient confondus. Les rapports des distances seraient conservés et on aurait "AA₁" = "AA₂" = "A₂A₃" vu que "AA₁" = "A₂B" + "AA₃".

En fait les points seraient disposés exactement comme si l'on avait fait partir un faisceau allant de A vers A₁.

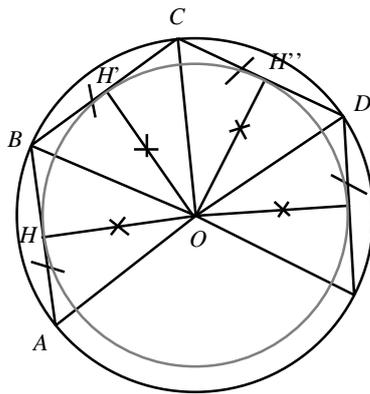
L'étude venant d'être faite pourrait se faire pour n'importe quel arc de C_i formé par deux points consécutifs du faisceau C. On pourrait de nouveau « découper » cet arc de cercle et former un nouveau cercle C_{ii}, et ainsi de suite indéfiniment, ce qui veut dire que l'on peut subdiviser chaque arc de cercle par autant d'arcs que l'on veut et être sûr que le faisceau les atteindra. [NDLR : l'argument présenté ne prouve, tel qu'il est, que la possibilité de subdiviser *autant de fois* que l'on veut un arc donné. Il faut s'assurer que cela implique bien que toute partie d'arc est touchée par le faisceau : c'est, nous semble-t-il, l'objet du paragraphe assez énigmatique qui suit :]

En fait, nous venons d'effectuer une bijection sur l'arc "AB" pour le transformer en cercle où A et B sont confondus. Le parcours du faisceau ne se referme pas ; le faisceau atteint donc tout arc de cercle du faisceau, aussi petit soit-il.

☞ le faisceau est dense sur le cercle.

Le rayon est-il dense sur la couronne ?

[NDLC : pour éviter au lecteur de devoir se reporter à la figure du haut de la page 137, je ne recule devant aucun sacrifice !]

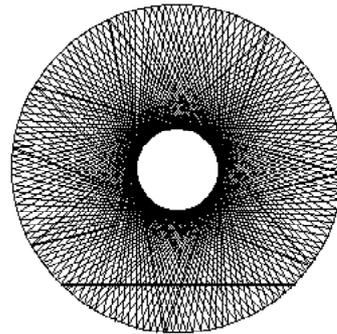
**Conclusion :**

☞ Le faisceau est dense sur la couronne.

On peut établir une **bijection** entre le cercle C et le cercle C' en associant chaque point de C à un point de C' de telle façon que :

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow H \\ B &\leftrightarrow H' \\ C &\leftrightarrow H'' \\ &\dots \end{aligned}$$

De cette façon, le cercle C' garde les mêmes propriétés que le cercle C et comme à chaque point du faisceau sur C est associé un point, et un seul, du faisceau sur C' et qu'à chaque point du faisceau sur C' est associé un point, et un seul, du faisceau sur C , on peut en conclure que le faisceau est aussi dense sur le cercle C' et on peut répéter cette étude pour n'importe quel cercle $C''(O, r'')$ $r' \leq r'' \leq r$. Ce qui veut dire que le faisceau est dense sur tout cercle se trouvant dans la couronne, donc qu'il atteint n'importe quelle surface de la couronne, aussi petite soit-elle.



[NDLR : pour rendre cette argumentation rigoureuse, il faudrait donner un sens précis aux mots utilisés ; en particulier :

- ◆ quelles sont les propriétés du cercle C qui nous intéressent ?
- ◆ quel faisceau considère-t-on sur C' ?
- ◆ quelles propriétés géométriques cette **bijection** conserve-t-elle ? (il s'agit de la relation donnée ci-dessus, correspondance point par point entre le cercle C et le cercle C')