sommes d'ensembles de nombres

Mlle Hilène Lin, Mlle Hélène Ly, élèves de 3° du **collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93)**, établissement jumelé avec le **collège Anne Frank de Bussy St Georges (77)**

enseignant :
M. Pierre Lévy

chercheur :
M. Olivier Bodini

coordination article : LY Hélène

compte-rendu de parrainage :

Les élèves du collège Victor Hugo de Noisy le Grand ont traité le sujet suivant en s'appuyant sur trois cas particuliers.

Pour deux ensembles {A} et {B} donnés dont on connait le nombre d'éléments, peut-on déterminer sans tout calculer le nombre d'entiers contenus par l'ensemble {A + B} ? ({A + B} étant calculé d'une certaine manière)

Cn— Somme d'ensembles d'entiers. 3

Additionner $A = \{3, 5\}$ et $B = \{3, 6, 8\}$, c'est former un nouvel ensemble $A+B$ avec les résultats des additions d'un nombre pris dans A et d'un nombre pris dans B : par exemple, $A+B = \{6, 8, 9, 11, 13\}$. Additionnons plusieurs fois un même ensemble, fixé à l'avance. Peut-on prévoir la taille de l'ensemble obtenu ? Ce type d'opération apparaît par exemple lorsque l'on paye quelque chose avec de la monnaie (pièces de 1F, 2F, 5F et 10 F, utilisées en plusieurs exemplaires). Plus généralement, comprendre la croissance par addition d'ensembles de nombres ou de suites de nombres (= des *vecteurs*) permet d'accélérer la diffusion d'informations dans un réseau de communication.

On peut définir une opération d'addition sur des ensembles de nombres entiers positifs de la façon suivante.

Si $A = \{1 ; 2\}$ et $B = \{7 ; 8 ; 10\}$,

alors

$$A+B = \{1+7 ; 1+8 ; 1+10 ; 2+7 ; 2+8 ; 2+10\}$$

c'est-à-dire

$$A + B = \{8 ; 9 ; 11 ; 9 ; 10 ; 12\}.$$

Un ensemble ne pourra avoir plusieurs fois le même élément ; donc

$$A + B = \{8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}.$$

Peut-on prévoir la taille et les éléments qui composent un ensemble somme sans avoir à faire tous les calculs ?

On ajoute un ensemble ne comportant qu'un seul nombre.

On a $N_0 = \{x ; y\}$ un ensemble de deux éléments et on lui ajoute $\{z\}$. On obtient :

$N_1 = \{x ; y\} + \{z\} = \{x + z ; y + z\}$ qui est un ensemble de deux éléments.

$N_2 = \{x + z ; y + z\} + \{z\} = \{x + 2z ; y + 2z\}$ qui est toujours un ensemble de deux éléments.

Par exemple :

$N_0 = \{2 ; 5\}$ on ajoute $\{3\}$
$N_1 = \{2 ; 5\} + \{3\} = \{2 + 3 ; 5 + 3\} = \{5 ; 8\}$
$N_2 = \{5 ; 8\} + \{3\} = \{5+3 ; 8+3\} = \{8 ; 12\}$
etc …

Propriété 1

Si on ajoute un ensemble de 1 nombre à n'importe quel ensemble de n nombres, on obtient toujours un ensemble de n nombres.

On ajoute des ensembles de nombres ayant le même écart.

On appelle E l'écart entre deux nombres d'un même ensemble. On ajoute un ensemble de nombres de E en E à un autre ensemble de nombres également de E en E.

Par exemple $A = \{2 ; 5\}$ et $B = \{3 ; 6 ; 9\}$. L'écart entre les nombres est de 3. On a :

$$A + B = \{2+3 ; 2+6 ; 2+9 ; 5+3 ; 5+6 ; 5+9\}$$

c'est-à-dire

$$A + B = \{5 ; 8 ; 11 ; 8 ; 11 ; 14\}$$

ainsi

$$A + B = \{5 ; 8 ; 11 ; 14\}$$

On remarque que l'écart entre les nombres de l'ensemble somme est toujours de 3. Ceci est toujours vrai et …

… en voici une preuve. Soit

$$N = \{x ; x + E ; x + 2E ; \dots ; x + nE\}$$

un ensemble de $(n+1)$ nombres dont l'écart est E.

Soit

$$M = \{y ; y + E ; y + 2E ; \dots ; y + mE\}$$

un ensemble de $(m+1)$ nombres dont l'écart est encore E.

$$N+M = \{x ; x + E ; x + 2E ; \dots ; x + nE\} + \{y ; y + E ; y + 2E ; \dots ; y + mE\}$$

$N+M = \{x+y ; x+y+E ; x+y+2E ; \dots ; x+y+mE ;$
$x+E+y ; x+E+y+E ; \dots ; x+E+y+(m-1)E ; x+E+y+mE ;$
$x+2E+y ; x+2E+y+E ; \dots ; x+2E+y+(m-1)E ; x+2E+y+mE ;$
…
$x+nE+y ; x+nE+y+E ; \dots ; x+nE+y+(m-1)E ; x+nE+y+mE\}$

$N+M = \{x+y ; x+y+E ; x+y+2E ; \dots ; x+y+mE ;$
$x+y+E ; x+y+2E ; \dots ; x+y+mE ; x+y+(m+1)E ;$
$x+y+2E ; \dots ; x+y+mE ; x+y+(m+1)E ; x+y+(m+2)E ;$
…
$\dots ; x+y+ (m+n)E\}$

A chaque ligne de calcul on ajoute un élément nouveau et ainsi on obtient :

$$N+M = \{x+y ; x+y+E ; x+y+2E ;\dots; x+y+mE ; x+y+(m+1)E ; \dots ; x+y+(m+n)E\}$$

On obtient bien un ensemble somme de nombres dont l'écart est E. On remarque en plus que le plus petit élément de cet ensemble est la somme des deux plus petits éléments des ensembles et que le plus grand est la somme des plus grands. Enfin, le nombre d'éléments de cet ensemble est $\boldsymbol{m + n + 1}$.

Dans notre exemple :

$A = \{2 ; 5\}$ et $B = \{3 ; 6 ; 9\}$.
$E = 3$; $m = 1$ et $n = 2$.

Sans faire de calcul, on sait que :

$$A + B = \{2+3 ; (2+3) + 3 ; (2+3) + 2 \times 3 ; (2+3) + 3 \times 3\}$$

$$A + B = \{5 ; 8 ; 11 ; 14\}$$

Propriété 2

Si on ajoute deux ensembles de nombres ayant le même écart, on obtient un ensemble de nombres ayant encore le même écart. le plus petit est la somme des plus petits et le plus grand la somme des plus grands. Le nombre d'éléments de cet ensemble somme se calcule ainsi :

$$\frac{\text{le plus grand - le plus petit}}{\text{écart}} + 1$$

Remarque : si on additionne des paquets de nombres consécutifs, on obtient un paquet de nombres consécutifs.

On ajoute deux ensembles identiques de nombres ayant le même écart E.

Par exemple prenons $A_0 = \{3 ; 5 ; 7\}$. A_0 a 3 éléments. L'écart E est de 2. D'après la propriété 2, on obtient :

$A_1 = A_0 + A_0 = \{6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14\}$.
A_1 a 5 éléments.

$A_2 = A_1 + A_0 = \{9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21\}$.
A_2 a 7 éléments.

$A_3 = A_2 + A_0$
$= \{12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24 ; 26 ; 28\}$.
A_3 a 9 éléments.

Combien A_{10} aura-t-il d'éléments ?

Etudions le cas général :

Soit $N_0 = \{x ; x + E ; x + 2E ; \ldots ; x + nE\}$.

$N_1 = N_0 + N_0$
$= \{x + x ; x + x + E ; \ldots ; x + x + (n + n)E\}$
$= \{2x ; 2x + E ; \ldots ; 2(x + nE)\}$

N_1 possède $2n + 1$ éléments ($\frac{2nE}{E} + 1$)

$N_2 = N_1 + N_0$
$= \{2x+x ; 2x+E+x ; \ldots ; 2x+(n+n)E+x+nE\}$
$= \{2x+x ; 2x+x+E ; \ldots ; 2(x+nE)+x+nE\}$
$= \{3x ; 3x+E ; \ldots ; 3(x+nE)\}$

N_2 possède $\frac{3nE}{E} + 1$ éléments,

c'est-à-dire $3n + 1$ éléments.

$N_3 = N_2 + N_0$
$= \{3x+x ; 3x+x+E ; \ldots ; 3(x+nE)+x+nE\}$
$= \{4x ; 4x+E ; \ldots ; 4(x+nE)\}$

N_3 possède $\frac{4nE}{E} + 1$ éléments,

c'est-à-dire $4n + 1$ éléments.

Propriété 3

Si $N_0 = \{x ; x+E ; x+2E ; \ldots ; x+nE\}$ est un ensemble de nombres ayant pour écart E.
On note $N_t = N_0 + N_0 + \ldots + N_0$ (somme de t ensembles N_0).
N_t possède $(t + 1) \times n + 1$ éléments.
Le plus petit est $(t + 1)x$; le plus grand est $(t+1) (x + nE)$;
Tous les nombres de cet ensemble ont pour écart E.

On ajoute deux ensembles de nombres ayant des écarts E1 et E2 différents.

Prenons par exemple $A = \{2 ; 5 ; 8 ; 11\}$ l'écart est de 3 et $B = \{6 ; 10 ; 14\}$ l'écart est de 4.

$A + B = \{2 ; 5 ; 8 ; 11\} + \{6 ; 10 ; 14 \}$

$A + B = \{8 ; 11 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 21 ; 22 ; 25\}$

Rien d'évident n'apparaît sur ce genre de calculs. Nous avons alors tenté de généraliser afin de comprendre mieux ce qui se passe.

Prenons un ensemble

$$A = \{x ; x + 3 ; x + 6 ; x + 9\}$$

et

$$B = \{y ; y + 4 ; y + 8\}$$

Pour calculer $A + B$, changeons la présentation des calculs.

	x	x + 3	x + 6	x + 9
y	x + y	x + y + 3	x + y + 6	x + y + 9
y + 4	x + y + 4	x + y + 7	x+ y+ 10	x+ y+ 13
y + 8	x + y + 8	x+ y+ 11	x+ y+ 14	x+ y+ 17

Essayons avec des écarts non consécutifs :

	x	x + 3	x + 6	x + 9
y	x + y	x + y + 3	x + y + 6	x + y + 9
y + 5	x + y + 5	x + y + 8	x+ y+ 11	x+ y+ 14
y + 10	x+ y+ 10	x+ y+ 13	x+ y+ 16	x+ y+ 19

Voici un troisième exemple :

	x	x + 3	x + 6	x + 9
y	x + y	x + y + 3	x + y + 6	x + y + 9
y + 7	x + y + 7	x+ y+ 10	x+ y+ 13	x+ y+ 16
y + 14	x+ y+ 14	x+ y+ 17	x+ y+ 20	x+ y+ 23

Notre année de recherche hélas s'achève sans que l'étude de ce dernier cas soit élucidée. Nous espérons que de futurs collègues seront intéressés par ce travail et qu'ils auront à cœur de poursuivre cette recherche.