pile ou face

par Claire Juramy, Jean-Francois Vischi, Arthur Schulz, Julien Pointillard, Laurent Cottereau, Kim Hae Koo, Olivier Cabedoce, Fréderic Lang, élèves de secondes et de premières scientifiques des lycées La Fontaine et Buffon

enseignants : Mmes et MM. Biscarat, Gaudemet, Lattuati et Moscovici

chercheur : M. Gilles Godefroy

sujet

2 joueurs jouent à pile ou face. Face rapporte 1 franc, pile fait perdre 1 franc.

S'ils jouent 100 fois chacun, combien de fois vont-ils être à égalité d'argent ?

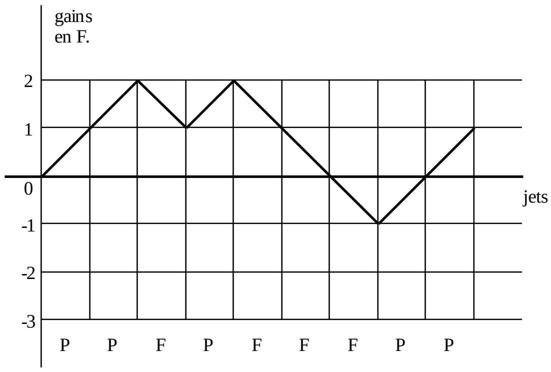
Même question avec *n* francs.

---

le problème

On imagine deux personnes jouant à “pile ou face”, l'une pariant toujours sur “pile”, l'autre toujours sur “face”. Le montant de l'enjeu est le même à chaque lancer, par exemple de 1 F.

Si l'on trace l'évolution de la fortune de l'un des deux joueurs, avec en abscisse le numéro du lancer et en ordonnée le montant de ses gains (ou de ses pertes), on obtient une droite brisée semblable à l'exemple de la figure 1 :



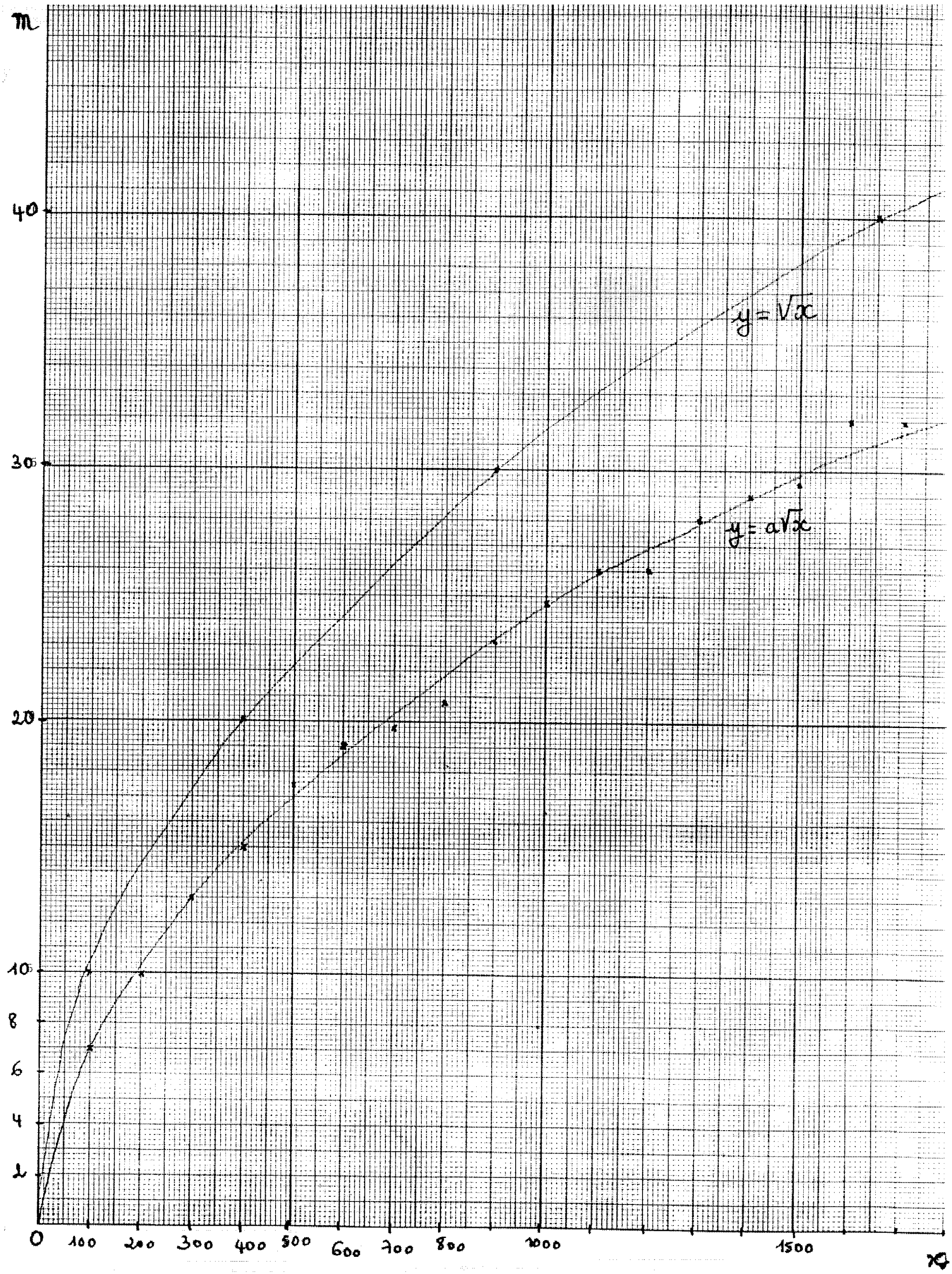
On remarque qu'à plusieurs reprises, la droite passe par l'abscisse 0 : les deux joueurs sont à égalité.

On cherche à déterminer le nombre moyen de passages à 0 en fonction du nombre de lancers, soit le nombre moyen d'égalités des gains pour un nombre donné de lancers.

expérimentation

Grâce aux calculatrices, puis à l'ordinateur, on a établi un tableau du nombre moyen de passages à 0 pour 100, 200, 300, jusqu'à 2000 lancers. Voici les moyennes m obtenues pour x lancers (calculées sur 10 fois 200 lancers de x pièces) :

x = 100 → m = 6.93	x = 200 → m = 10.07
x = 300 → m = 13.29	x = 400 → m = 15.16
x = 500 → m = 17.41	x = 600 → m = 19.51
x = 700 → m = 19.68	x = 800 → m = 20.49
x = 900 → m = 22.67	x = 1000 → m = 24.82
x = 1100 → m = 26.10	x = 1200 → m = 26.10
x = 1300 → m = 28.16	x = 1400 → m = 29.07
x = 1500 → m = 29.46	x = 1600 → m = 32.08
x = 1700 → m = 32.27	x = 1800 → m = 33.30
x = 1900 → m = 34.76	x = 2000 → m = 35.43



D'après ce tableau, on trace une courbe avec en abscisse le nombre de lancers et en ordonnée la moyenne des passages à 0 : figure 2.

Par comparaison, on observe que la courbe doit avoir une équation de type y = $a\sqrt{x}$. Pour calculer le coefficient réducteur a, on trace une nouvelle courbe avec en abscisse la racine du nombre de jets. On obtient une droite : figure 3.

En utilisant différentes méthodes, on trouve $a \approx 0.8$.

conclusion

Le nombre de passages à 0, y, est donc défini par :

$$y = 0.8\sqrt{x},$$

avec x le nombre de lancers.