quels nombres ont une forme carrée ?

par Isabelle Ang (3° techno), Sayana Pen (3° techno), Siek-Thor Lim (3°), Raphaël Nicolle (3°), Céline Phong (3°), Aurélien Pic (3°), Raymond Ros (3°), Elinne Lin (2nde), élèves et anciens élèves du Collège Victor Hugo (2 rue Elsa Triolet 93160 Noisy-le-Grand)

enseignants : Mme Martine Brunstein, M. Pierre Lévy

chercheur : M. Pierre Duchet

Si on prend un polygone et qu'on le place sur un quadrillage, on obtient un certain nombre de points à l'intérieur et sur les bords. On peut ainsi associer à un nombre entier certaines formes géométriques. Nous avons décidé d'étudier les nombres ayant une forme carrée.

Nous avons beaucoup expérimenté pour tenter de trouver des nombres ne pouvant pas avoir une forme carrée. Nous utilisons un quadrillage de 1 cm. Nous avons travaillé avec des carrés de côtés entiers.

Voici le tableau auquel nous sommes parvenus.

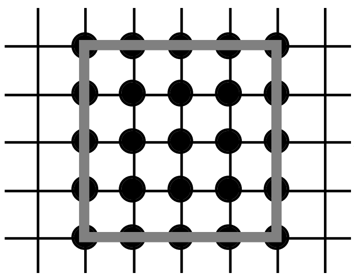
0	**1**	**2**	3	**4**	**5**	**6**	7	**8**	**9**	10	11	**12**	**13**	14	15	**16**	17
18	19	**20**	21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	**30**	31	**32**	33	34	35
36	37	38	39	40	**41**	**42**	43	44	45	46	47	48	**49**	**50**	51	52	53
54	55	**56**	57	58	59	60	61	62	63	**64**	65	66	67	68	69	70	**71**

Au cours de ces manipulations, nous n'étions pas toujours d'accord. En effet, certains points étaient-ils réellement à l'intérieur ? Les carrés étaient-ils réellement carrés ?

Nous n'avions que peu de cas sûrs.

Nous avons commencé à établir des preuves dans certains cas. On appellera N le nombre total de nœuds. On appellera n le nombre de nœuds sur un côté. On appellera c la longueur d'un côté.

Premier cas :
cas des carrés ayant les côtés parallèles aux lignes du quadrillage et ayant les quatre sommets sur des nœuds.

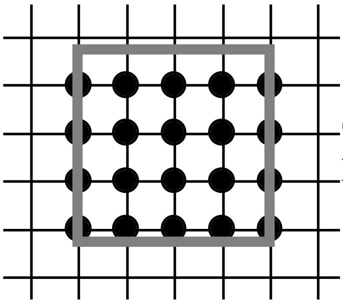


On appellera cette position P_1.

On a : $N_1 = n^2$.

Tous les carrés parfaits ont une forme carrée.

Deuxième cas :
cas des carrés ayant deux côtés opposés sur les lignes du quadrillage mais dont les sommets ne sont pas sur des nœuds. On a translaté le carré du cas précédent en suivant une des directions du quadrillage et on s'arrête lorsque les sommets sont entre deux nœuds.



On appellera cette position P'.

Lorsque l'on passe de la position P_1 à la position P', on perd une rangée de nœuds, c'est-à-dire n nœuds. On a :

$$N' = N_1 - n = n^2 - n$$

c'est-à-dire

$$N' = n\,(n - 1).$$

Tous les nombres obtenus comme produit de deux entiers consécutifs ont une forme carrée.

Ces nombres sont toujours pairs. En effet …

• si n est pair il s'écrit $2p$ (p est un entier)

$$N' = 2p\,(2p - 1\,)$$

$N' = 2\,(2p^2 - p)$ donc il est pair.

• si n est impair, il s'écrit $2p + 1$

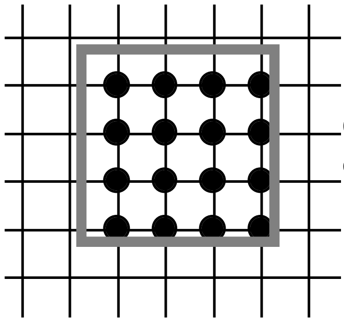
$$N' = (2p + 1\,)\,(2p + 1 - 1\,)$$
$$N' = (2p + 1\,) \times\ 2p$$

$N' = 2\,(2p^2 + p)$ donc il est pair.

Les nombres obtenus sont :

0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, …

Troisième cas :
cas des carrés ayant toujours les côtés parallèles aux lignes du quadrillage mais pas sur les lignes. Ils n'ont toujours aucun sommet sur des nœuds.



On appellera P_2 cette position.

En fait, on a translaté le carré une première fois dans une direction du quadrillage et une seconde fois dans l'autre direction du quadrillage. On a :

$$N_2 = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$$

preuve : Soit P_1 la position de départ : le carré est placé comme dans le premier cas. P_2 la position de l'arrivée. P' est une position intermédiaire correspondant au deuxième cas.

Lorsqu'on passe de la position P_1 à la position P', on passe de n^2 nœuds à $n^2 - n$ nœuds.

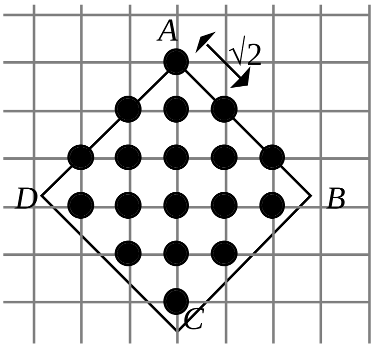
Quand on passe de la position P' à la position P_2, on perd encore une « rangée » de nœuds, c'est-à-dire $n - 1$ nœuds.

On obtient $N_2 = (n^2 - n\,) - (n - 1)$ nœuds.
c'est-à-dire $N_2 = n^2 - n\ - n + 1$
c'est-à-dire $N_2 = n^2 - 2n + 1$
c'est-à-dire $N_2 = (n - 1)^2$

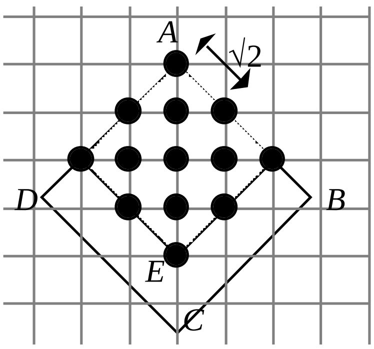
On retrouve là encore tous les carrés parfaits.

Cette remarque montre que le fait de compter les nœuds sur les bords ou pas ne fait pas apparaître de nouveaux types de nombres (les deux équipes avaient d'ailleurs travaillé de façon différente).

Nous avons alors commencé à faire pivoter nos carrés. Les uns ont recommencé une nouvelle expérimentation, alors que les autres ont tenté de généraliser un cas particulier : nous fixons un sommet sur un des nœuds du quadrillage. Effectuons alors une rotation de 45 ° autour de ce sommet que l'on appellera *A*. Sur les côtés [*AB*] et [*AD*], se trouvent un certain nombre de nœuds. Y a–t–il des nœuds sur les côtés [*DC*] et [*BC*] ?



Pour cela, il faudrait que le sommet *C* soit lui–même sur un nœud du quadrillage. Soit *c* la longueur d'un côté : la diagonale [*AC*] mesure $c\sqrt{2}$. Il faudrait donc que$c\sqrt{2}$ soit entier, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ puisse s'écrire sous forme d'une fraction. (Nous pensons que cela est impossible, mais nous ne l'avons pas encore démontré.) Cela signifie que dans cette position, seul le sommet *A* est sur un nœud du quadrillage.

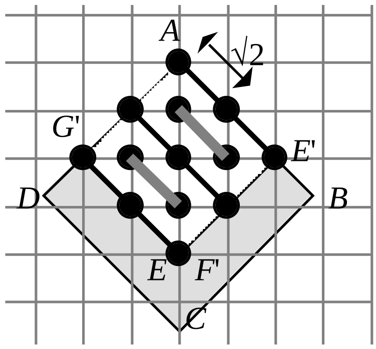


Soit *E* un point de la diagonale [*AC*] tel que $AE = c$. Pour savoir combien il y a de nœuds sur le segment [*AE*], il suffit de savoir combien de fois il y a $\sqrt{2}$ dans *AE* (voir dessin). $AE = k\sqrt{2}$, donc $k = \text{AE}/\sqrt{2} = c/\sqrt{2}$.

On prend la valeur entière de $c/\sqrt{2}$ (c'est la partie entière que l'on note $\text{E}(c/\sqrt{2})$). Dans notre exemple, $c = 4$ cm et donc le nombre de nœuds sur le segment [*AE*] est de $\text{E}(4/\sqrt{2}) + 1$ car il faut compter le sommet *A*. On en trouve ainsi 3. Ainsi, d'une façon générale, le nombre de nœuds sur le côté d'un carré penché à 45° est :

$$\text{E}(c/\sqrt{2}) + 1$$

Cherchons maintenant le nombre de nœuds à l'intérieur. Lorsque l'on fait tourner un carré à côtés entiers de 45° autour d'un sommet, seul ce sommet est sur un nœud du quadrillage. On peut décomposer ainsi le carré en un carré possédant ses quatre sommets sur les nœuds du quadrillage (le carré *AE'F'G'*) et une « frange » hachurée sur le dessin.



Etudions d'abord le cas du carré *AE'F'G'*. Ce carré possède $n = \text{E}(c/\sqrt{2}) + 1$ nœuds sur ses côtés. Il possède ainsi *n* segments identiques (~~les bleus~~ les grands fins) que l'on obtient par simple translation possédant chacun *n* nœuds. Il possède aussi $(n - 1)$ segments (~~les rouges~~ les petits gros) possèdant chacun $(n - 1)$ nœuds. Un tel carré possède ainsi en tout : $n^2 + (n - 1)^2$ nœuds.

Reste à régler le problème de la « frange ». Le côté [*AE*] a pour longueur $c/\sqrt{2}$. Calculons $r = c/\sqrt{2} - \text{E}(c/\sqrt{2})$.

Nous avons alors deux cas :

• Si $r < c/\sqrt{2}$ (c'est la demi-diagonale d'un carreau du quadrillage), alors la « frange » ne contient aucun nœud en plus.

• Si $r \geq c/\sqrt{2}$, alors la frange contient $2n - 1$ nœuds (voir dessin).

Dans notre exemple, le carré droit *ABCD* a un côté de 4 cm. Lorsqu'il pivote de 45° autour du point *A*, aucun autre sommet n'est sur un nœud. On obtient le carré *AEFG* qui possède E(4/√2) + 1 c'est-à-dire 3 nœuds. Dans le carré *AE'F'G'* on obtient en tout

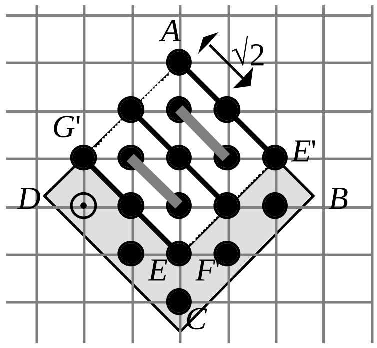
$$n^2 + (n-1)^2 \text{ nœuds}$$

c'est-à-dire $3^2 + 2^2 = 13$ nœuds.

Calculons :

$$r = 4/\sqrt{2} - E(4/\sqrt{2}) = 4/\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}828$$

et on a $\sqrt{2}/2 \approx 0{,}707$. La frange contient donc $2n - 1$ nœuds en plus c'est-à-dire 5 nœuds.



Le carré penché *AEFG* contient ainsi en tout 18 nœuds.

Que se passe-t-il pour les carrés penchés à 45° mais n'ayant aucun sommet sur des nœuds ? … recherche à poursuivre.