la suite de Conway

par Marjorie Martin et Bruno Martinez, Deug A2, Université de Marseille II

enseignants et chercheurs : MM. Pierre Arnoux et Christian Mauduit

Suite de Conway (Faculté de Luminy, parrainé par La Fontaine et Buffon)

Etude de la suite avec au départ 1 ou tout autre caractère. Puis exposé de différentes études sur la fréquence d'apparition des chiffres et sur la longueur de chaque chaîne de caractères.
Etude intéressante et bien expliquée, menée avec rapidité (4 semaines).

Knuth — dans son livre « *Les nombres surréels* » — s'attarde longuement sur les méthodes de Conway. Il écrit :

« *Au commencement, tout était vide et J.H.W.H. Conway créa les nombres.*

« *Sa première règle est que chaque nombre correspond à deux ensembles de nombres précédemment créés, et aucun membre de l'ensemble de gauche n'est égal à aucun membre de l'ensemble de droite.*

« *Sa seconde règle est qu'un chiffre est inférieur ou égal à un autre si et seulement si aucun membre du premier chiffre de l'ensemble de gauche n'est supérieur ou égal au second chiffre et aucun membre du second chiffre de l'ensemble de droite n'est inférieur ou égal au premier chiffre.*

« *C'est ainsi que le premier chiffre fut créé depuis l'ensemble vide de gauche et l'ensemble vide de droite. Conway l'appela le zéro puis il sépara les chiffres positifs des chiffres négatifs et voulut additionner et soustraire ces chiffres. Il prouva ainsi que la soustraction était l'inverse de l'addition.*

« *Il désira ensuite faire fructifier ces chiffres et multiplia un chiffre par un autre. C'est ainsi que furent créées toutes les possibilités.*

« *Conway, après avoir vérifié l'exactitude de ses règles, maîtrisa alors les signes, les séries, les quotients et les racines. Jaillirent ainsi une infinité de chiffres.* »

C'est dans cette optique qu'il créa une suite dite “*la suite de Conway*”, suite infinie et croissante dont nous allons étudier les principales caractéristiques.

présentation générale de la suite

Si les premiers termes de la suite de Conway sont les suivants :

1, 11, 21, 1211, 111221,

à la question “Quel est le prochain terme ?”, la réponse est :

312211.

Cette suite fait partie des *suites qui se lisent.* En effet, si on lit le cinquième terme, on voit trois 1, deux 2 et un 1 ; ce qui se lit en chiffres : 312211.

Ecrivons quelques termes pour observer le comportement de la suite :

$X_1 = 1$
$X_2 = 11$
$X_3 = 21$
$X_4 = 1211$
$X_5 = 111221$
$X_6 = 312211$
$X_7 = 13112221$
$X_8 = 1113213211$
$X_9 = 31131211131221$
$X_{10} = 13211311123113112211$
$X_{11} = 11131221133112132113212221$
$X_{12} = 3113112221232112111312211312113211$
$X_{13} = 1321132132111213122112311311222113111221131221$
$X_{14} = 11131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211$

La suite est composée de séquences. Nous les appellerons :
• *singletons*, les séquences du type : 1, 2, 3 ;
• *doublets*, celles du type : 11, 22, 33 ;
• *triplets*, celles du type : 111, 222, 333.
Par exemple 1113213211 se décompose en 111/3/2/1/3/2/11 c'est-à-dire un triplet, cinq singletons et un doublet.

le chiffre 4 n'apparaît jamais

A première vue, le chiffre 4 n'apparaît pas dans la suite. Démontrons-le.

La seule façon d'obtenir un 4 est l'apparition de telles séquences : 1111, 2222, 3333.

Montrons que ces séquences ne peuvent apparaître.

Pour obtenir quatre chiffres consécutifs, nous avons plusieurs possibilités :

• deux triplets : 111222 → 3132, 111333 → 3133, 222111 → 3231, 222333 → 3233, 333111 → 3331, 333222 → 3332

• un triplet et un doublet : 11122 → 3122, 11133 → 3123, 22211 → 3221, 22233 → 3223, 33311 → 3321, 33322 → 3322, 11222 → 2132, 11333 → 2133, 22111 → 2231, 22333 → 2233, 33111 → 2331, 33222 → 2332

• un triplet et un singleton : 1112 → 3112, 1113 → 3113, 2221 → 3211, 2223 → 3213, 3331 → 3311, 3332 → 3312, 1222 → 1132, 1333 → 1133, 2111 → 1231, 2333 → 1233, 3111 → 1331, 3222 → 1332

• deux doublets : 1122 → 2122, 1133 → 2123, 2211 → 2221, 2233 → 2223, 3311 → 2321, 3322 → 2322

• un doublet et un singleton : 112 → 2112, 113 → 2113, 221 → 2211, 223 → 2213, 331 → 2311, 332 → 2312, 122 → 1122, 133 → 1123, 211 → 1221, 233 → 1223, 311 → 1321, 322 → 1322

• deux singletons : 12 → 1112, 13 → 1113, 21 → 1211, 23 → 1213, 31 → 1311, 32 → 1312

Ceci prouve bien que le chiffre 4 n'apparaît jamais dans la suite de Conway.

certains triplets n'apparaissent jamais

Si nous appelons "*tierce*" une combinaison de trois chiffres (à ne pas confondre avec un triplet), nous pouvons affirmer qu'il en existe $3^3 = 27$. Or, si nous regardons d'un peu plus près la suite, nous constatons qu'il n'en apparaît que 23. En effet, les tierces 233, 313, 323, et 333 n'apparaissent pas.

Démontrons cette affirmation.

Commençons par 333.

Si nous voulons obtenir 333, la séquence lue doit être de la forme 333111 ou 333222. Montrons que de telles séquences sont impossibles à obtenir. Découpons 333111 de 2 façons :

33 / 31 / 11 et 3/33 / 11/ 1

Pour obtenir 33, on doit avoir 333
31, on doit avoir 111
11, on doit avoir 1.

L'antécédent de 333111 serait donc 3331111 qui donne 3341, ce qui est impossible à obtenir.

Pour obtenir 3, on doit avoir 1, 2, ou 3 fois le nombre 3
33, on doit avoir 333
11, on doit avoir 1
1, on doit avoir une fois le nombre 1, 2, 3.

L'antécédent de 333111 serait donc par exemple 333312 qui donne 431112. De même, les autres possibilités ne donnent pas 333111.

Nous pouvons raisonner de la même façon pour 333222.

Traitons maintenant 233.

Pour obtenir 233 nous devons lire une séquence de la forme : 33111 ou 33222.

Découpons 33111 de 2 façons :

3/31/11 et 33/11/1.

Pour obtenir 3, on doit avoir 1, 2, ou 3 fois le nombre 3.
31, on doit avoir 111.
11, on doit avoir 1.

L'antécédent de 33111 serait donc par exemple 331111 qui donne 2341. De même les autres possibilités ne donnent pas 33111.

Pour obtenir 33, on doit avoir 333 qui est impossible à avoir. Le raisonnement s'arrête donc ici.

Le raisonnement est le même pour 33222.

Démontrons enfin que 313 et 323 ne peuvent apparaître.

Pour obtenir 313 nous devons lire une séquence de la forme 11222.

Découpons 11222 de 2 façons :

11/12/22 ou 1/11/22/2.

Pour obtenir 1 on doit avoir 1, 2, ou 3 fois le chiffre 1.
11 on doit avoir 1.
22 on doit avoir 22
2 on doit avoir 2 fois le chiffre 1, 2, ou 3.

L'antécédent de 111222 serait par exemple 1112233 qui se lit 312223.

Il en est de même pour les autres possibilités.

La démonstration pour 323 est analogue.

suite croissante et infinie

Nous allons maintenant démontrer que la suite est croissante. Pour cela nous allons démontrer que le nombre de chiffres que comporte chaque terme de la suite est pair [NDLR : sauf le premier terme, bien sûr.]

En effet, la suite est composée de singletons, doublets et triplets.

Si nous notons T_n le nombre de triplets, D_n le nombre de doublets et S_n le nombre de singletons, soit U_n le nombre de chiffres du $n^{\text{ème}}$ terme, on a alors :

$$U_n = 3\ T_n + 2\ D_n + S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2\ T_n + 2\ D_n + 2\ S_n.$$

[NDLR : un triplet se décrit avec deux chiffres (31, 32, 33), un doublet aussi (21, 22, 23), un singleton aussi (11, 12, 13) ; comme il n'y a que des triplets, des doublets et des singletons, la longueur du nouveau terme produit est bien $2\ T_n + 2\ D_n + 2\ S_n$.]

Ceci prouve bien que le nombre de chiffres composant le n+1$^{\text{ème}}$ terme est pair.

Par récurrence, on voit que tous les termes ont un nombre de chiffres pair.

[NDLR : bof ; à part le premier terme, chaque terme de la suite a un prédécesseur, qu'on peut appeler $n^{\text{ème}}$ terme, le terme qui nous intéresse ayant un nombre de chiffres $U_{n+1} = 2\ T_n + 2\ D_n + 2\ S_n = 2\ (T_n + D_n + S_n)$: chaque terme de la suite — sauf le seul qui n'ait pas de prédécesseur — est bien écrit sous forme du produit de 2 et d'un entier, et il n'est pas besoin de récurrence ici.]

Désormais, adoptons une notation pour décrire un terme de la suite.

Un terme pourra s'écrire A_1, A_2,........, $A_{k\text{-}1}$, A_k, A_{k+1},......., A_l avec l la longueur du terme, et A_n le n-ième chiffre du terme.

Montrons que 2 termes ayant une place paire du type $2p$ et $2p+2$ ne peuvent être égaux.

Prenons un exemple très simple :

$$13 \rightarrow 1113$$

Les chiffres qui se trouvent à une place paire représentent donc le terme précédent. On ne peut avoir $A_{2p} = A_{2p+2}$, car par définition de la suite on devrait avoir $(A_{2p-1}+A_{2p+1})$, A_{2p} [au lieu de $A_{2p-1}A_{2p}A_{2p+1}A_{2p}$ … ; en clair, quand, à une étape, on rencontre 111, à l'étape suivante, on n'écrit pas 1**12****1** mais 3**1**.]

Passons à la démonstration de la croissance de la longueur de la suite.

• nous n'avons que des singletons.

$$U_n = S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2\, S_n.$$

Dans ce cas la longueur de la suite va doubler, elle est donc strictement croissante.

• nous avons des doublets et des singletons.

$$U_n = 2\, D_n + S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2\, D_n + 2\, S_n.$$

Les doublets donnent 2 chiffres, les singletons également, donc la longueur du prochain terme sera égale ou supérieure à celle de celui-ci.

• nous avons des triplets, des doublets, et des singletons.

$$U_n = 3\, T_n + 2\, D_n + S_n.$$

D'où :

$$U_{n+1} = 2\, T_n + 2\, D_n + 2\, S_n.$$

Ici les triplets nous posent problème car lorsqu'on les lit on perd un chiffre. Un triplet est de la forme 111 ou 222 (puisque 333 n'existe pas). Le premier chiffre d'un triplet a nécessairement une place impaire.

Avant le premier triplet nous aurons des doublets et/ou un nombre pair, on ne perd donc pas de chiffre avant le premier triplet. Au premier triplet nous perdons un chiffre. Or le premier chiffre du prochain triplet est aussi [de rang] impair, il y a donc un nombre impair de chiffres entre 2 triplets, donc nécessairement au moins un singleton qui “crédite” d'un chiffre la longueur. On rattrape ainsi le chiffre perdu avec le triplet.

On procède ainsi jusqu'au dernier triplet. Le dernier chiffre du dernier triplet occupe une place impaire, or la longueur du terme est paire, on a donc un nombre de chiffres impair qui termine le terme, et nécessairement au moins un singleton qui rattrape le un perdu par le triplet. La longueur du terme créé est donc supérieure ou égale à la longueur du terme qui l'a engendré.

CQFD.

Grâce à cette propriété nous pouvons montrer que le nombre de triplets est inférieur ou égal à celui des singletons. Reprenons la notation du début, on a :

$$U_n = 3\, T_n + 2\, D_n + S_n.$$
$$U_{n+1} = 2\, T_n + 2\, D_n + 2\, S_n.$$
$$U_{n+1} - U_n = S_n. - T_n$$
$$U_{n+1} - U_n \geq O$$

Donc $T_n \geq S_n$.. De plus on pense que la suite est infinie mais nous ne sommes pas parvenus à le montrer.

suite cyclique (début et fin de la suite)

Allons plus loin dans l'écriture de la suite et repartons du 14[ème] terme :

X_{14}=11131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211

X_{15}=3113112221131112311311121321123113213221121113122113121113222123
11322113212221

X_{16}=132113213221133112132113311211131221121321131211132221123113112
2211312113211

X_{17}=1113122113121113222123211211131221232112311311222112111312211311
1231133221121321132213221133112132123123112111312211332211311112221
131221

X_{18}=311311222113111231133211121312211231131122111213122112132113213
2212311331122211331121321232221121113122113121113222123211211312211
121311121321123113112221232221133122211311 2211

Nous constatons alors que le début de la suite se répète avec une période de trois. Par exemple le début du X_{12} est le même que celui de X_{15}. Si nous allons encore plus loin dans la suite, nous remarquons que le nombre de chiffres identiques du début de X_{18} avec le début de X_{15} est supérieur à celui de X_{15} avec X_{12}.

Démontrons que la suite commence toujours par 1113, 3113 ou 1321. En effet, 1113… → 3113… → 1321… → 1113.

Si à présent nous regardons la fin de la suite, nous constatons qu'il y a alternance entre 221 et 211. En effet …221→ …211→ …221.

fréquence d'apparition des chiffres 1, 2 et 3

Il nous a été dit que la fréquence d'apparition des chiffres 1, 2, 3, était une conséquence de la théorie atomique. D'après un programme informatique la fréquence d'apparition
• du chiffre 1 est : 0, 49614482…
• du chiffre 2 est : 0, 31970435…
• du chiffre 3 est : 0, 18415081…

les autres suites qui se lisent

Il existe plusieurs variantes de la suite de Conway. La première suite est celle qui débute par un 0 à la place du 1. Elle possède la forme suivante :

0
10
1110
3110
132110
1113122110
311311222110
13211321322110
1113122113121113222110
31131122211311123113322110
132113213221133112132123222110

Au premier abord nous pouvons constater que cette suite présente des analogies avec la suite précédemment étudiée. En effet, cette suite est croissante : à chaque itération du processus la longueur de la chaîne augmente. Le chiffre pris au départ est toujours ramené à la dernière place. A la différence de la première suite nous constatons que le chiffre 0 apparaît. Cependant le 1, le 2, le 3, ainsi que le 0 sont les uniques chiffres de cette suite. De façon analogue au chapitre précédent, nous pourrions montrer que cette suite est une suite infinie et croissante, qu'un certain nombre de triplets seulement apparaissent, que le chiffre 4 n'apparaît jamais, et que les premiers chiffres d'un terme se répètent tous les trois termes. Nous remarquons également que les derniers chiffres de chaque terme se répètent continuellement : au bout du troisième terme, 110 est le triplet qui figure à la fin de chaque terme de la suite. La façon de montrer cette cyclicité est analogue à celle utilisée au chapitre précédent. C'est pourquoi nous n'allons pas nous attarder sur cette suite et passer à une autre suite lisible : la suite de Robinson.

la suite de Robinson

Elle se construit selon le même principe mais avec une différence essentielle : les chiffres lus se classent ensuite dans l'ordre décroissant selon le principe suivant.

Si la suite commence par :

0
10
1110
3110
132110

Quel est le terme suivant ?

La réponse est 13123110 car on lit le nombre de trois, le nombre de deux, le nombre de un et de zéros et on les classe par orde décroissant.

En effet le terme 132110 se lit de la façon suivante : nous voyons au total trois 1, un 3, un 2, et un 0, ce qui se classe de cette manière : un 3 un 2 trois 1 et un 0 et ce qui se lit : 13123110.

Si on continue cette suite on obtient :

0
10
1110
3110
132110
13123110
23124110
1413223110
1423224110
2413323110
1433223110
1433223110

La suite est donc constante à partir de ce terme que cela soit au niveau du nombre de chiffres c'est-à-dire 10 chiffres ou au niveau du classement de ces chiffres. En effet si on continue cette suite on obtiendra toujours 1433223110.

Si la suite débute par le chiffre 1 on obtient :

1
11
21
1211
1231
131221
132231
232221
1344211
14131231
14231241
24132231
14233221
14233221

La suite devient également constante. Pour les valeurs initiales entre 0 et 39, la suite est constante à partir d'un certain rang. Pour 40 nous obtenons :

40
1410
1422110
14123110
1413124110
2413125110
151413224110
142413225110
251413324110
1524**2**3224110
1524**1**3423110
1524**2**3224110

Après quoi la suite se répète avec une période de deux. Pour une valeur initiale de 50 nous trouvons une période de trois. Ensuite nous trouvons toujours une de ces trois périodes : un, deux ou trois.

conclusion

En guise de conclusion nous pouvons dire que l'étude de cette suite a été une expérience très intéressante autant du point de vue analyse de la suite mais également recherche personnelle dans les bibliothèques spécialisées comme celle du CIRM où nous avons pu avoir accès à plusieurs livres de Conway notamment ceux qu'il a écrit sur les jeux mathématiques.

[NDLR : les auteurs donnent en annexe un texte qui n'est pas d'eux, concernant des liens entre la suite de Conway et la table périodique des éléments, liens dont il nous est difficile de faire état, tant la copie qu'ils nous ont transmise est de mauvaise qualité. Mais le sujet abordé dans cette annexe a fait l'objet d'un article, que l'on pourra consulter avec profit, dans le
n° 219 (janvier 1996) de *Pour la Science* : Jean-Paul DELAHAYE, *Les commentaires du mathématicien*, pp. 100-103.]