le cube transpercé

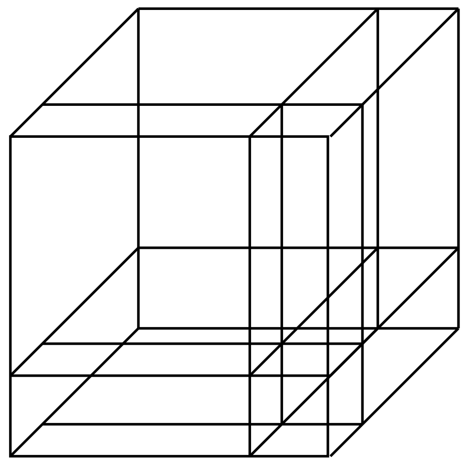
par Florence Mayeur, 2nde, du lycée P. Corneille de Rouen, Franck Lerebours, 1° S et Nicolas Auvet, TS, du lycée Val de Seine de Grand-Quevilly

enseignants : MM. Pierre Lacomme et Jean Toromanoff

chercheur : M. Claude Dellacherie

le principe

On part d'un cube d'arête n que l'on va diviser en n^3 petits cubes d'arête 1, notés cubes E (élémentaires). Soit C un cube E quelconque. On place une tour qui va protéger tous les cubes E situés sur les 3 axes parallèles aux arêtes du cube et passant par C.

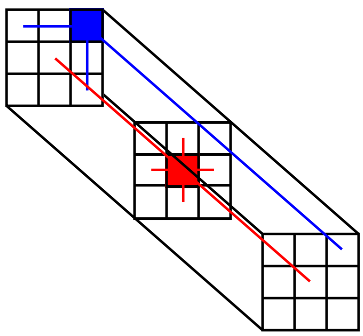


le but

Le but est de trouver le nombre minimal de tours nécessaires pour protéger la totalité d'un cube d'arête n.

première relation

Chaque axe protégé par une tour comporte n–1 cubes E hormis celui qui contient la tour. Trois axes sont protégés, donc une tour protège 3 (n – 1) cubes E . De plus, elle protège celui qui la contient. Par conséquent une tour protège 3 n – 2 cubes E.



Exemples de protection.

deuxième relation

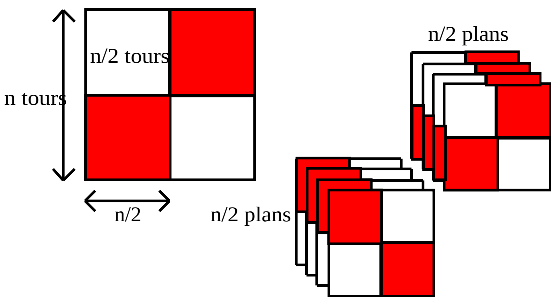
Nous avons dit en début d'exposé que chaque cube était découpé en n^3 cubes E. On en déduit que le nombre strictement minimal de tours nécessaires est :

$$N = \frac{\text{nombre total de cubes} E}{\begin{array}{c}\text{nombre de cubes } E\\ \text{protégés par une tour}\end{array}} = \frac{n^3}{3n - 2}$$

Dans le cas (très fréquent) où N n'est pas entier, on choisit d'arrondir à l'entier supérieur, car un nombre de tours inférieur à N serait insuffisant.

troisième relation :

On divise le cube d'arête n en n plaques de dimension $n \times n \times 1$, que l'on assimilera à des plans, pour plus de simplicité. Chaque plan est séparé en 4 carrés de côté $n/2$. Sur la moitié des plans, on dispose les tours dans l'un des carrés. Sur l'autre moitié, dans le carré opposé, de façon à contrôler les mêmes carrés restants.



On dispose $n/2$ tours sur chaque carré de côté n/2. Il y a donc :

$$n \text{ plans} \times n/2 \text{ tours sur chaque plan,}$$

c'est-à-dire $n^2/2$ tours dans le cube, si n est pair. Pour n impair, n^2 est impair donc $n^2/2$ n'est pas entier. On prendra donc $(n^2+1)/2$ tours. ($(n^2–1)/2$ serait inférieur au minimum).

On généralise à $n/2$ plans, puis on recommence pour les $n/2$ plans suivants, mais à l'opposé.

Chevauchements et inutilités :

Définitions

Le ***chevauchement*** : on parle de chevauchement lorsqu'un cube E est protégé plusieurs fois.

L'***inutilité*** : c'est une protection inutile sur un cube E. Si un cube E est protégé $k+1$ fois, on compte un chevauchement mais k inutilités. On rencontre de telles situations dès que $n \geq 3$.

2 4 3	3	T3
2	1	3
T2	2	5 3 2

4	1	3
1	T1	1
2	1	5

T4	4	4 5 3
4	1	5
2 4 5	5	T5

Chevauchements à 3 : 8 soit 8 inutilités.

Formules

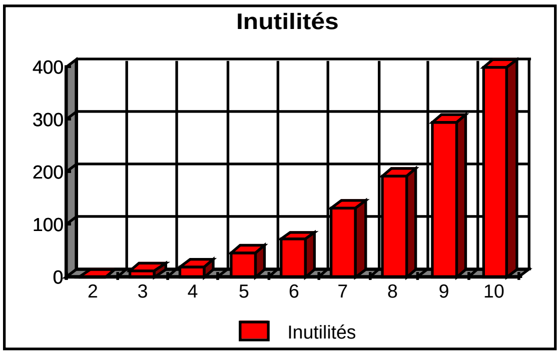
Si la disposition est optimale, le nombre d'inutilités est fonction de la valeur d'arête. En effet, il s'agit de la différence entre le nombre de cubes E protégés par le nombre réel de tours et le nombre total de cubes E. Soit I le nombre d'inutilités, on obtient :

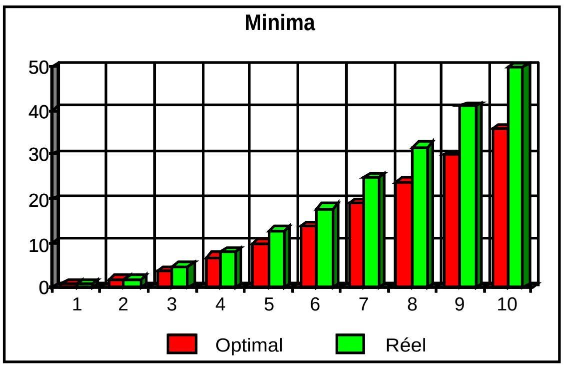
• n pair :

$$I = \frac{n^2}{2}(3\,n - 2) - n^3 = \frac{n^3 - 2\,n^2}{2}$$

• n impair :

$$I = \frac{(n^2+1)}{2}(3\,n - 2) - n^3 = \frac{n^3 - 2\,n^2 + 3\,n - 2}{2}$$





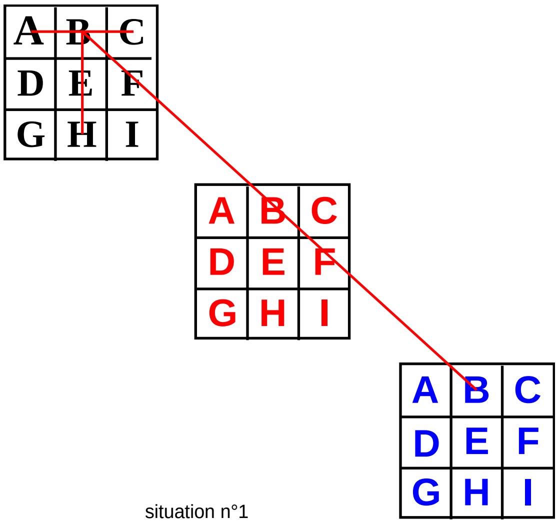
Permutations de plaques

Definition : une plaque est un ensemble de cubes E constituant un parallélépipède rectangle de dimension $n \times n \times 1$.

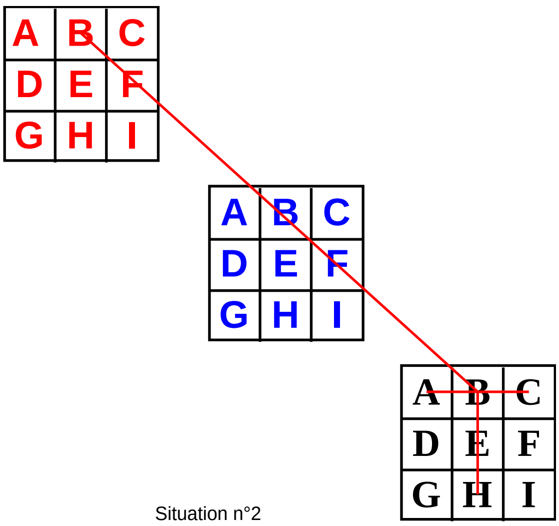
On constate que si l'on permute les plaques d'un cube entre elles, la protection reste inchangée (figures suivantes). On peut donc obtenir, à partir d'une disposition initale, un grand nombre de dispositions.

Justification

Soit P une tranche et T une tour située dans P. Lorsqu'on change P de place, les protections de T dans P ne changent pas. De plus, les axes normaux à P sont modifiés mais non détruits (par exemple un axe ABC deviendra BCA).



situation n°1



Situation n°2

LE CUBE TRANSPERCE

Ceci est le programme Turbo-Pascal pour le calcul des valeurs considérées dans cet exposé :

```
program Cube_transperce ;
uses crt ;
var a, n, f, p, r, i, m : longint ;
begin
writeln(‘Valeur de l'arête?') ; readln(n) ;
{Premiere formule : Val de Seine 1er trimestre}
f : =n*n*n div (3*n–2) ;
p : =n*n*n mod (3*n–2) ;
if p=0 then f : =f else f : =f+1 ;
writeln(‘nombre fictif de cubes E : ') ;
writeln(f) ;
{Deuxieme formule : Corneille 1er trimestre}
m : =n mod 2 ;
if m=0 then r : =n*n div 2 else r : =(n*n+1) div 2 ;
writeln(‘nombre r‚el de cubes E : ') ;
writeln(r) ;
{Troisieme formule : Val de Seine Deuxieme trimestre}
i : =(3*n–2)*r–n*n*n ;
writeln(‘nombre d''inutilités : ') ;
writeln(i) ;
repeat until keypressed ;
end.
```

[NDLR : on espère que cet article pourra donner des idées à l'un de ses lecteurs, car le problème est toujours ouvert …]