le coloriage du tore

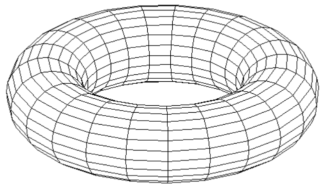
par Sanaa Benhabdelabi, Angélique Détail et Anne-Lise Torlay, élèves de 2nde et 1° STT du lycée Louise Michel de Bobigny

enseignant : M. François Gaudel

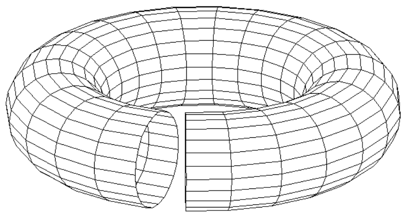
avec la participation de Jean Brette

Le polyèdre de Szilassi nous montre que sept couleurs sont nécessaires pour recouvrir tout polyèdre possédant un trou sans que deux faces voisines aient la même couleur.

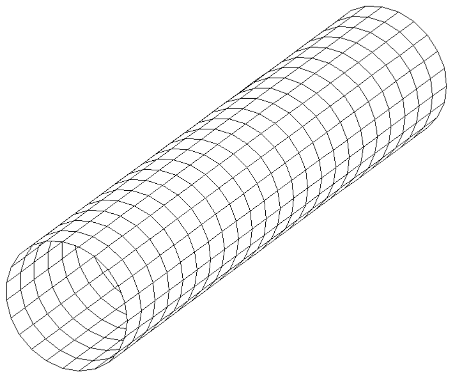
Le problème est de tracer sur un tore la carte la plus simple possible, qui nécessite sept couleurs et dont deux pays frontaliers n'aient jamais la même couleur. On part d'un tore :



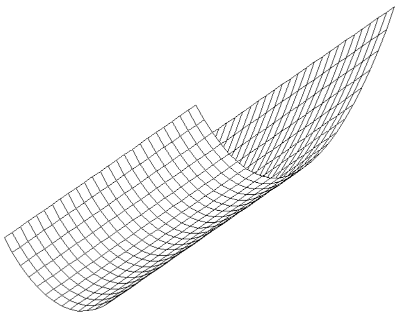
Dans un premier temps, nous le coupons comme ça :



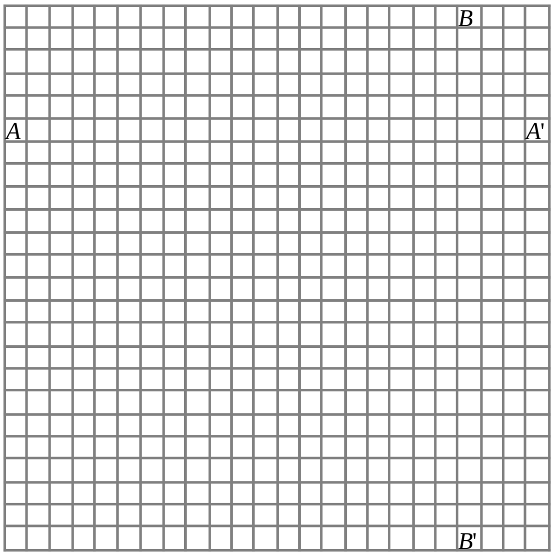
Pour obtenir ceci :



Ensuite nous le sectionnons longitudinalement :



pour obtenir le résultat ci-après :



… un rectangle (ou un carré si on le déforme).

Notre carte doit donc maintenant être tracée sur un carré ; mais attention : les côté opposés se correspondent exactement. En réalité, ils sont confondus. Les cases *A* et *A*' doivent être considérées comme en contact, de même que les cases *B* et *B*'.

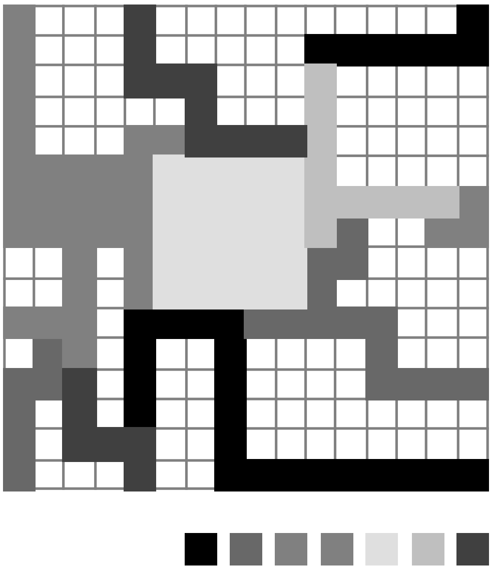
première phase

Nous avons cherché des pavages de tout un tas de façons possibles, sans grand succès : avec des polygones compliqués. Nous sommes arrivés à des pavages nécessitant six couleurs distinctes, mais pas 7.

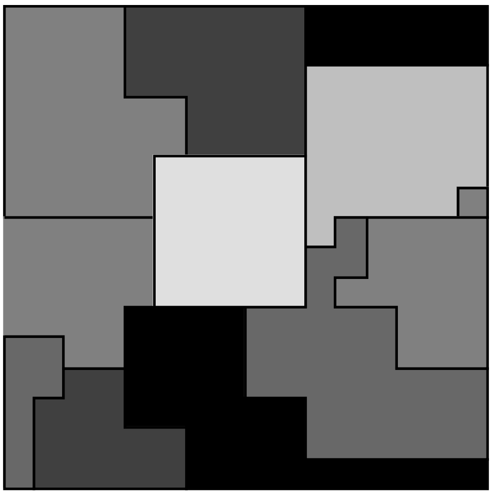
deuxième phase

Notre professeur nous a conseillé d'utiliser un quadrillage. Sur un ordinateur, il est facile de colorier et d'effacer des cases. Là, nous sommes arrivés en deux étapes aux résultats suivant :

1. tracé d'un centre d'où partent six “vers” qui sont tous au contact les uns des autres : il faut donc sept couleurs distinctes pour les colorier.

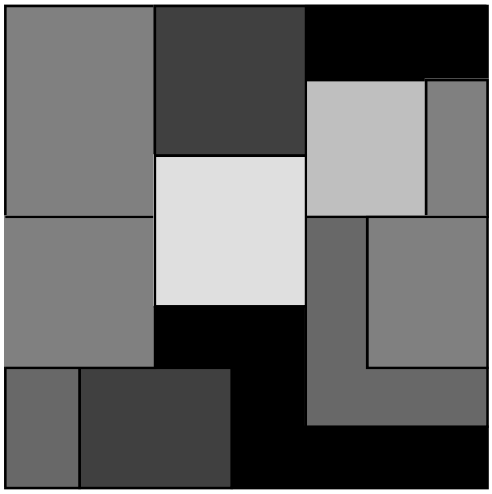


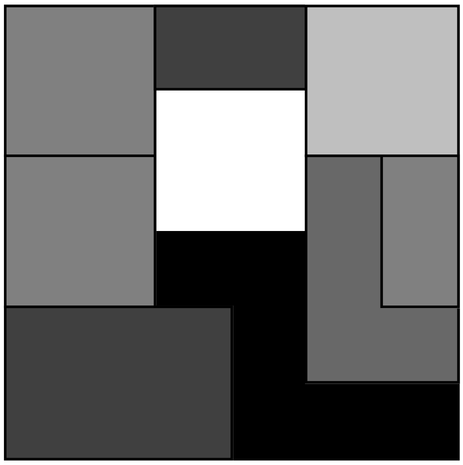
2. remplissage des vides : notre pavage est réalisé !



troisième phase

Nous avons cherché à diminuer le nombre de carrés du quadrillage pour obtenir un coloriage ausi simple que possible. Nous sommes arrivés aux résultats suivants.





quatrième phase

Jean Brette a participé à notre activité, et nous a conseillé de chercher un quadrillage « hélicoïdal ». Lui-même nous en a proposé un de 21 carreaux, en remplaçant les parallèles par une hélice. Il nous a encouragés à faire mieux, en « enroulant hélicoïdalement dans les deux sens ».

Nous avons relevé son défi (avec l'aide de notre professeur quand même). Voici donc un pavage avec 14 parallélogrammes, suivi du tore colorié correspondant.