recherche de polyèdres particuliers

par Aurélien Hatri, Hermès Loco (1°S) et Karima Ghellam (TS), Atelier « Exploration Mathématique » du lycée Louise Michel de Bobigny

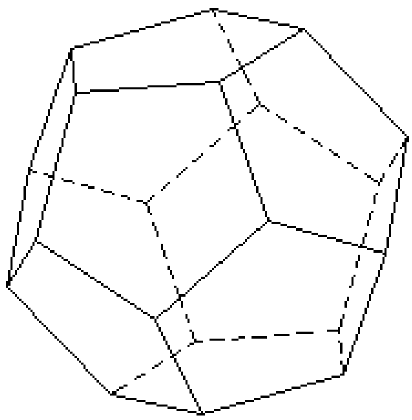
enseignant : M. François Gaudel

Merci à Jean Brette pour ses idées et sa venue au lycée.

le ballon de football

Nous allons vous exposer différentes façons d'assembler les pentagones et les hexagones réguliers pour former un polyèdre convexe. Parmi ces façons vous en connaissez deja deux : celle qui correspond au ballon de football,

et celle où il n'y a pas du tout d'hexagone (il s'agit du dodécaèdre régulier).



Premièrement, nous allons montrer qu'un tel assemblage comporte forcément douze pentagones.

Deuxièmement, nous allons montrer qu'il ne peut pas y avoir plus de vingt hexagones.

Troisièmement, à l'aide de polygones en plastique nous présenterons une autre façon d'assembler hexagones et pentagones réguliers.

Premièrement,

Appellons x le nombre de pentagones et y le nombre d'hexagones.

Appliquons la formule d'Euler : $s–a+f=2$, où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

$$s = \frac{5x+6y}{3}$$

En effet, chaque sommet appartient à exactement trois faces (la somme des angles doit être inférieure à 360°), et il y a x faces possédant 5 sommets et y faces en possédant six.

$$a = \frac{5x+6y}{2}$$

En effet chaque arête appartient à exactement deux faces, et il y a x faces comportant cinq arêtes et y faces en comportant 6.

$$f = x+y$$

En effet le nombre de faces est égal au nombre de pentagones plus le nombre d'hexagones.

D'où

$$\frac{5x+6y}{3} - \frac{5x+6y}{2} + x + y = 2$$

et

$$10x+12y+6x+6y-15x-18y = 12$$

Donc

$$x = 12$$

Conclusion :

Le nombre de pentagones d'un ballon de foot (et de tout autre polyèdre convexe constitué de pentagones et d'hexagones réguliers) est … 12.

Deuxièmement,

Trois hexagones ne peuvent avoir un sommet commun. Chaque hexagone a donc **au moins** 3 arêtes communes avec un pentagone. Or il y a 12 pentagones ce qui fait

$$12 \times 5 = 60$$

arêtes de pentagones. Il ne peut donc pas y avoir plus de 20 hexagones.

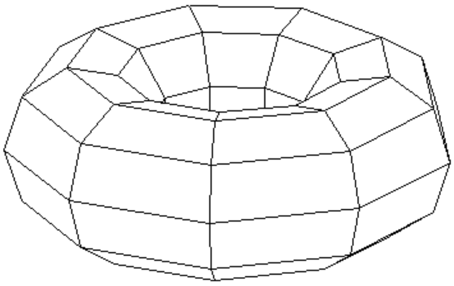
Le ballon de football est donc le polyèdre constitué d'hexagones et de pentagones réguliers qui comporte le plus de faces.

Troisièmement,

Nous avons construit également un polyèdre comportant douze pentagones et deux hexagones ; mais nous n'avons pas prouvé son existence, ni montré qu'il n'y en avait pas d'autres.

Généralisation de la formule d'Euler

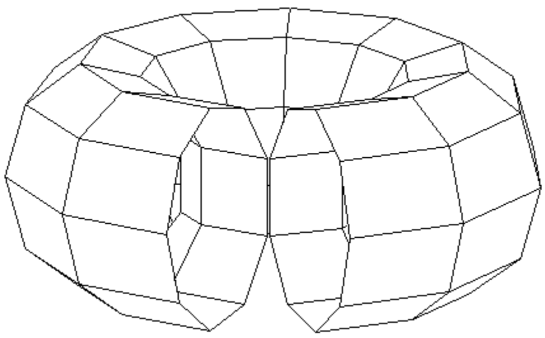
Nous allons maintenant généraliser la formule d'Euler, vue précédemment, dans le cas de polyèdres « troués » [non simplement connexes] : pour commencer, regardons ce qui se passe dans un polyèdre à un trou.



Ce polyèdre possède : s sommets, a arêtes, f faces.

Sectionnons le par un plan qui ne passe par aucun sommet. Un tel plan existe forcément, car les sommets sont en nombre fini alors que les plans disjoints (parallèles) qui coupent notre « beignet » comme sur la figure sont en nombre infini ; cela nous permet de faire un calcul « général ».

Nous obtenons le polyèdre suivant, possédant 0 trou : nous avons écarté les deux bords de la coupure.



Les deux nouvelles faces qui en résultent n'ont pas été placées, ce qui explique qu'on voie l'intérieur du polyèdre.

Appelons s' le nombre de sommets, f' le nombre de faces, a' le nombre d'arêtes de ce nouveau polyèdre.

Dans la coupe du polygone, nous pouvons voir la présence de 2 nouveaux polygones (polygones de coupe). Nous supposons que chacun possède

- 1 face
- n sommets
- n arêtes

Regardons de plus près ce qui se passe pour **les sommets**.

s' représente le nouveau nombre de sommets. s est l'ancien nombre de sommets. Etant donné que sur les polygones de coupe on a 2 n sommets en plus, nous avons la formule suivante :

$$s' = s + 2\,n$$

Regardons ce qui se passe pour les **arêtes**.

a' représente le nouveau nombre d'arêtes tandis que a représente l'ancien nombre. Chaque sommet d'un polygone de coupe correspond, avec son vis-à-vis, à une arête coupée en deux donc on a rajouté (2 – 1 =) 1 arête.

Pour n points, on a n arêtes coupées en deux. On a donc rajouté (2 n – n =) n arêtes. Avec les 2 n arêtes des pôlygones de coupe, nous avons donc la formule suivante :

$$a' = a + 2\,n + n$$
$$a' = a + 3\,n$$

Voyons maintenant ce qu'il advient des **faces**. f' représente le nouveau nombre de faces. f est l'ancien nombre de faces.

Lors de la coupe du polyèdre, chaque arête du polygone de coupe a coupé une face en deux. Donc on a rajouté (2 – 1 =) 1 face. Or comme il y a n arêtes dans ce nouveau polygone, n faces sont coupées en deux donc on a rajouté 2 n – n soit n faces en plus. Et comme il y a les deux faces que sont les polygones de coupe eux mêmes, nous avons la formule suivante :

$$f' = \mathrm{f} + 2 + n$$

Avant la coupe, nous avions :

s	a	f

Après cette dernière, nous avons:

s'	a'	f'
$= s + 2$ n	$= a + 3\,n$	$= f + 2 + n$

Or le second polyèdre n'a plus de trou, donc on a :

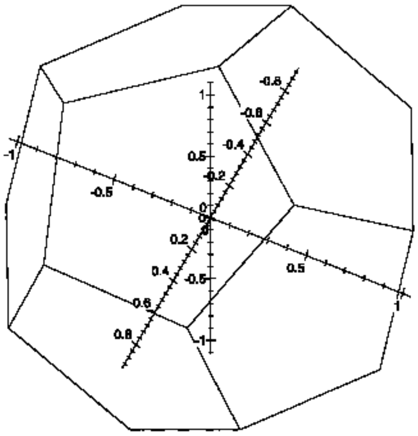
$$s' - a' + f' = 2$$
$$s + 2\,n - (a + 3\,n) + f + 2 + n = 2$$
$$s + 2\,n - a - 3\,n + f + 2 + n = 2$$
$$s\ - a + f + 2 = 2$$
$$\boldsymbol{s - a + f = 0}$$

Pour 0 trou , on a : $s - a + f = 2$
Pour 1 trou, on a : $s - a + f = 0$

Un raisonnement par récurrence permet alors de généraliser la formule d'Euler sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{s - a + f = 2\,(1 - k)}$$

(k indiquant le nombre de trous)



le polyèdre de Csaszar

Problème : *trouver des polyèdres n'ayant pas de diagonales.*

On connaît déjà le tétraèdre. Nous allons parler du polyèdre découvert en 1940 par le mathématicien hongrois Akos CSASZAR.

Ses propriétés :
Sommets : 7 Faces : 14
Arêtes : 21 Trou : 1
Pas de diagonale : tous les sommets sonts joints par les arêtes. Il en résulte que toutes les faces sont des triangles.

On va montrer que *le polyèdre de Czacazar est le seul polyèdre à un trou ne possédant pas de diagonales*.

Nous utiliserons la formule d'Euler pour un polyèdre à un trou :

$$\boldsymbol{s - a + f = 0}$$

Chaque face est bordée par 3 arêtes, sinon il y aurait une diagonale non tracée. Mais chaque arête est utilisée par 2 faces. On obtient donc :

$$a = \frac{3}{2} f \quad \text{ou} \quad f = \frac{2}{3} a$$

On sait aussi que chaque sommet est relié à (s–1) autres sommets pour former (s–1) arêtes. Donc s sommets sont reliés à (s–1) autres sommets, ce qui donne $s\,(s - 1)$ arêtes.

Mais chaque arête relie deux sommets. Donc chaque arête est comptée deux fois, ce qui donne :

$$a = \frac{s\,(s - 1)}{2}$$

(nombre de combinaisons de deux éléments pris parmi s).

Exemples : prenons un triangle : 3 arêtes
quatre points : 6 arêtes.

Remplaçons a et f en fonction de s dans la relation d'Euler :

$$s - a + f = 0$$
$$s - \frac{s\,(s-1)}{2} + \frac{2}{3}\,a = 0$$
$$s - \frac{s\,(s-1)}{2} + \frac{2}{3}\,\frac{s\,(s-1)}{2} = 0$$
$$\frac{6\,s + 2\,s^2 - 2\,s - 3\,s^2 + 3\,s}{6} = 0$$
$$7\,s - s^2 = 0$$
$$s\,(7 - s) = 0$$

Comme $s = 0$ ne convient pas, évidemment, il faut donc $\boldsymbol{s = 7}$, et on en déduit le nombre d'arêtes **:**

$$a = \frac{7\,(7-1)}{2} = 21$$

et de faces :

$$f = \frac{2}{3} \times 21 = 14$$

… On peut se demander si ce polyèdre existe (Csaszar, 1940).

Maintenant, ***nous allons montrer qu'il faut au moins six trous pour trouver un autre polyèdre sans diagonales*** : la formule d'Euler donne une solution pour un nombre de trous $n = 6$, mais pas pour 2, 3, 4, 5.

Pour n trous, on a : $\boldsymbol{s - a + f = -2\,(n - 1)}$

On a, comme dans ce qui précède :

$$f = \frac{2}{3}\,a \quad \text{et} \quad a = \frac{3}{2}\,f$$

$$s - a + f = -2\,(n-1) \Leftrightarrow -s^2 + 7\,s = -12\,(n-1)$$

ce qui nous donne :

$$(s-3)(s-4) = 12\,n$$

Pour $n = 0$, on retrouve $s = 4$ (tétraèdre), et pour $n = 1$, $s = 7$ (polyèdre de Csaszar). Dans le cas général, $(s - 3)(s - 4)$, qui est le produit de deux entiers positifs consécutifs, doit être un multiple de 12.

Après $\mathbf{3} \times \mathbf{4}$ qui donne $s = 7$, le premier cas est $\mathbf{8} \times \mathbf{9}$ qui nous donne :

$$s - 4 = 8 \text{ d'où } \boldsymbol{s = 12},$$
$$12\,n = 72 \text{ d'où :}$$

$$\boldsymbol{n = 6} \text{ et } \boldsymbol{a = 66, f = 44}.$$

Le deuxième multiple est obtenu pour $11 \times 12 = 132$: $n = 11$, $s = 15$, $a = 105$, $f = 70$.

Mais nous ne savons pas si ces polyèdres existent.

le polyèdre de ***Szilassi***

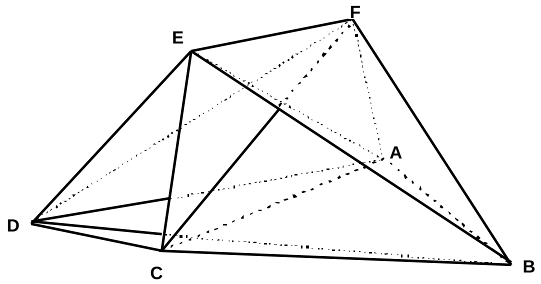
Par contre, le dual du polyèdre de Csaszar existe : c'est le polyèdre de **Szilassi** (trouvé par ce dernier en 1977).

[NDLC : si le polyèdre de Szilassi est le dual du polyèdre de Csaszar, alors le polyèdre de Csaszar est le dual du polyèdre de Szilassi ; et donc si le polyèdre de Szilassi existe, je ne vois pas ce qui empêcherait le polyèdre de Csaszar d'exister …]

Il a sept faces toutes adjacentes deux à deux, et un trou. Pour le peindre sans que deux faces adjacentes aient une couleur commune, il faut utiliser sept couleurs. Nous avons fabriqué un pavage particulièrement simple du tore, qui a la même propriété (voir article suivant).

Jean Brette nous ayant prêté un petit polyèdre de Csaszar en plastique, nous nous sommes appliqués à en calculer les coordonnées, et l'avons tracé à l'aide de « Maple ». Le résultat n'est pas génial … Par contre nous en avons construit un avec des tiges de bambou et une face relevable. Enfin, après avoir longtemps séché sur le polyèdre de Szilassi, nous en avons trouvé un dessin et un patron dans un ancien numéro de « Pour la Science ».

annexe 1 — le polyèdre de Csaszar en kit



Ci-dessus, nous voyons la partie inférieure du polyèdre de Csaszar : elle comporte six poins *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* :

• *A*, *B*, *C*, *D*, qui forment la « base », constituent, vus de dessus, un carré ; cependant, la diagonale [*BD*] est un peu en dessous de la diagonale [*AC*] (elles ne se coupent donc pas).

• Les point *E* et *F* sont au dessus du tout ; le segment [*EF*] est plus court que les deux segments précédents, horizontal comme eux. Sa direction a subi une légère rotation d'axe vertical par rapport à [*AC*].

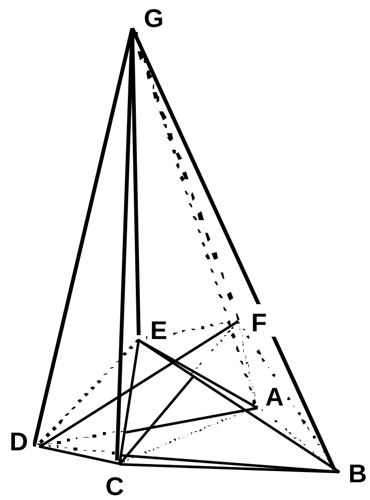
Les faces sont les suivantes : *ADB*, *DBC*, *ACF*, *ACE*, *BCF*, *ADE*, *EFB*, *EFD*. Naturellement tous les points sont joints par une arête. A ce stade, il manque encore un point, nous n'avons pas encore un polyèdre à un trou : il n'y a ni intérieur, ni extérieur.

• Le dernier point, *G*, vient coiffer le tout ; il apporte avec lui les faces : *GCD*, *GCE*, *GEB*, *GBA*, *GAF*, *GFD*.

Voici un exemple de coordonnées pour les différents points :

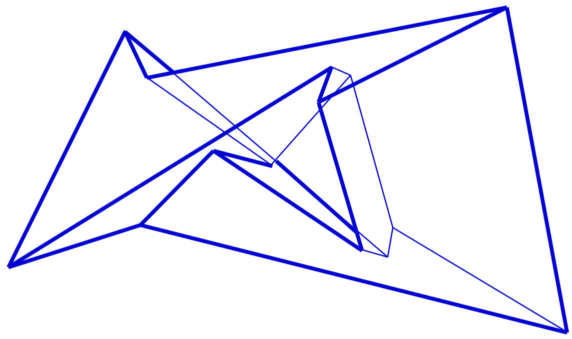
A(–1, 0, 0) ; *B*(0, 1, –0.15) ; *C*(1, 0, 0) ; *D*(0, –1, –0.15) ; *E*(0.4, –0.15, 0.65) ; *F*(–0.4, 0.15, 0.65) ; *G*(0, 0, 2).

Une fois les coordonnées connues, nous avons fabriqué notre polyèdre en bambou, et aussi en carton, en calculant les longueurs des arêtes. Cela n'a pas été le plus facile !



annexe 2 — le polyèdre de Szilassi en kit

• **Vue du polyèdre de Szilassi** : chaque face touche les 6 autres.



• **Patron des 7 faces hexagonales du polyèdre de Szilassi**, nommées a, b, c, d, e, f, g. (d'après E. Gilbert, des laboratoires Bell). L'assemblage se fait en accolant les côtés de même nom.