chiffres, symétries et différences

par Aude Rat et Céline Labois du lycée Val de Seine de Grand Quevilly (76), Paul François et Benoît Faucherand du lycée Corneille de Rouen (76)

enseignants : Dominique Grihon, Pierre Lacome, Jean Toromanoff

chercheur : Claude Dellacherie

Compte-rendu de l'exposé par les parrains du groupe : **CLG V. Hugo**

Nous choisissons un nombre dont nous mettons les chiffres dans l'ordre croissant ; ceci nous donne un nombre. Avec le même nombre nous mettons les chiffres dans l'ordre décroissant. Nous faisons leur différence, donc nous avons fait la soustraction des deux nombres. Avec le résultat nous avons fait de même, c'est-à-dire mettre les chiffres dans l'ordre croissant et décroissant. En faisant cela plusieurs fois, ceci nous amène aux nombres de départ.

Nous avons constaté qu'il y avait un cycle. En voici un exemple : nombre de départ 72.

```
 72      54      90      81      63      72
-27  => -45  => -09  => -18  => -36  => -27  . . .
 45      09      81      63      27      45
```

Ce qui nous a donné une formule pour trouver son suivant : d x 10 + u - u x 10 - d = 9(d - u).

Mais ceci n'est qu'un exemple à 2 chiffres, car à 3 chiffres et à 4 chiffres cela nous amène toujours un chiffre identique.

Quant à l'autre groupe, ils ont un peu déformé le sujet : ils ont permuté les nombres en les lisant à l'envers. Exemple : 1246 : on les lit à l'envers et cela fait 6421. Pour les différences, c'est la même démarche que celle indiquée plus haut.

Après avoir effectué plusieurs soustractions d'un nombre avec un autre nombre ayant les mêmes chiffres mais ordonnés différemment, on retrouve un résultat obtenu auparavant. Pourquoi et au bout de combien d'opérations ?

avec des nombres à deux chiffres

exemples :

$$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 23 \\ \hline 09 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -\ 27 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ -\ 09 \\ \hline 81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 54 \\ -\ 45 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ -\ 18 \\ \hline 63 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 90 \\ -\ 09 \\ \hline 81 \end{array}$$

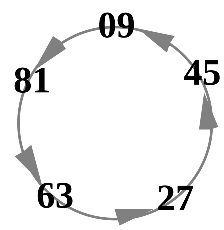
$$\begin{array}{r} 63 \\ -\ 36 \\ \hline 27 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ -\ 18 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ -\ 27 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ -\ 36 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ -\ 45 \\ \hline 09 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -\ 27 \\ \hline 45 \end{array}$$

• Nous retrouvons deux fois le même nombre après 6 opérations.

• Quel que soit le nombre du départ, on observe un et un seul cycle, atteint dès la première opération et formé de multiples de 9.



notons que dans le cas présent, 09 et 90 sont un seul et même élément du cycle.

Pourquoi les résultats de chaque soustraction sont-ils des multiples de 9 ?

Soit d le coefficient des dizaines et u celui des unités. On obtient donc en décomposant :
$10\,d + u - (10\,u + d) = 10\,d + u - 10\,u - d$
$= 9\,d - 9\,u = 9\,(d - u)$.

• Il apparaît clairement que pour un nombre de deux chiffres, nous n'avons qu'un seul cycle, celui des nombres du type 9 x, avec $x = d - u$.

avec des nombres à trois chiffres

Selon l'ordre des chiffres des deux nombres, on retrouve toujours soit un cycle de nombres, soit un même nombre.

premier cas : soustrayons un nombre avec des chiffres dans l'ordre décroissant, par un nombre ayant les mêmes chiffres mais disposés dans l'ordre croissant.

exemples :

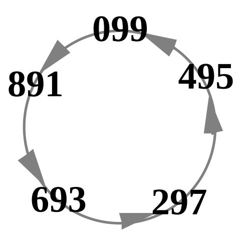
963	831	952
- 369	- 138	- 259
594	693	693
954	963	963
- 459	- 369	- 369
495	594	594
	954	954
	- 459	- 459
	495	495

On tombe toujours sur les mêmes chiffres : 4, 9, 5.

deuxième cas : on prend deux nombres, ayant les mêmes chiffres, mais disposés différemment. On prend alors le plus petit des deux que l'on retranche à l'autre.

836	762
- 638	- 267
198	495
891	594
- 198	- 495
693	099
693	990
- 396	- 099
297	891
792	891
- 297	- 198
495	693
594	693
- 495	- 396
099	297
990	792
- 099	- 297
891	495

On retrouve dans ce cycle les nombres :



remarque : chaque différence est un multiple de 99, car :

$$100\,c + 10\,d + u - (100\,u + 10\,d + c)$$
$$= 100\,c + 10\,d + u - 100\,u - 10\,d - c$$
$$= 99\,(c - u)$$

avec des nombres à quatre chiffres

premier cas : soustrayons de la même façon que précédemment :

9753	8642
- 3579	- 2468
6174	6174
7641	7641
- 1467	- 1467
6174	6174

Après avoir cherché toutes les possibilités sur ordinateur, nous avons constaté que nous trouvions toujours le même nombre : 6174.

Ici aussi, chaque différence est un multiple de 9, car :

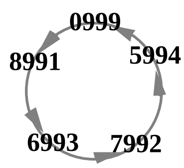
$$1000\,m + 100\,c + 10\,d + u$$
$$- (1000\,u + 100\,d + 10\,c + m)$$
$$= 999\ m + 99\,c - 90\,d - 999\,u$$
$$= 9\,(111m + 10\,c - 10\,d - 111\,u)$$

Pourquoi, lorsque l'on fait la soustraction de deux nombres dont les chiffres sont pairs consécutifs ou impairs consécutifs, trouve-t-on directement 6174 ?

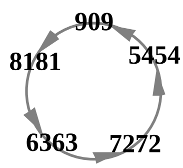
$[(u+6)\times 1000 + (u+4)\times 100 + (u+2)\times 10 + u]$
$-[u\times 1000 + (u+2)\times 100 + (u+4)\times 10 + (u+6)]$

Si $u = 0$ alors on obtient 6420 - 0246 = 6174.
Si $u = 1$ alors on obtient 7531 - 1357 = 6174.
Si $u = 2$ alors on obtient 8642 - 2468 = 6174.
Si $u = 3$ alors on obtient 9753 - 3579 = 6174.

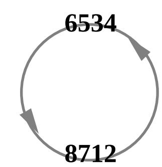
deuxième cas : en plaçant les chiffres sans faire attention à l'ordre, on observe quatre cycles :



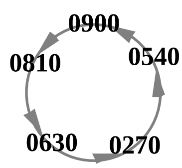
multiples de 999



multiples de 909



multiples de 1089



multiples de 90

Formule générale d'une "différence inversée"(*DI*) :

$$mcdu - ucdm = 1000\,m + 100\,c + 10\,d + u - 1000\,u - 100\,d - 10\,c - m = 999\,(m - u) + 90\,(c - d)$$

On s'est tout d'abord attaché à simplifier le problème à 162 cas.

En effet, en retranchant un nombre symétrique (du type *mc|cm*) à un nombre de quatre chiffres, celui-ci compte désormais deux chiffres et deux zéros sans que sa différence inversée change.

exemple :

6322 a la même différence inversée que

$$6322 - 2222 = 4100$$

Dans ce tableau, on a donc réécrit chaque cas et simplifié les différences :

m_1 \ c_1, d_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8800 / 9090	8600 / 9070	8400 / 9050	8200 / 9030	8000 / 9010	8020 / 9100	8040 / 9300	8060 / 9500	8080 / 9700
2	6800 / 7090	6600 / 7070	6400 / 7050	6200 / 7030	6000 / 7010	6020 / 7100	6040 / 7300	6060 / 7500	6080 / 7700
3	4800 / 5090	4600 / 5070	4400 / 5050	4200 / 5030	4000 / 5010	4020 / 5100	4040 / 5300	4060 / 5500	4080 / 5700
4	2800 / 3090	2600 / 3070	2400 / 3050	2200 / 3030	2000 / 3010	2020 / 3100	2040 / 3300	2060 / 3500	2080 / 3700
5	800 / 1090	600 / 1070	400 / 1050	200 / 1030	0 / 1010	200 / 1100	400 / 1300	600 / 1500	800 / 1700
6	2080 / 1900	2060 / 1700	2040 / 1500	2020 / 1300	2000 / 1100	2200 / 1010	2400 / 1030	2600 / 1050	2800 / 1070
7	4080 / 3900	4060 / 3700	4040 / 3500	4020 / 3300	4000 / 3100	4200 / 3010	4400 / 3030	4600 / 3050	4800 / 3070
8	6080 / 5900	6060 / 5700	6040 / 5500	6020 / 5300	6000 / 5100	6200 / 5010	6400 / 5030	6600 / 5050	6800 / 5070
9	8080 / 7900	8060 / 7700	8040 / 7500	8020 / 7300	8000 / 7100	8200 / 7010	8400 / 7030	8600 / 7050	8800 / 7070

On distingue deux groupes de nombres :

• 81 du type m_1c_100

(dans ce cas $m_1 = m - u$; $c_1 = c - d$, $DI = 999\,m_1 + 90\,c_1$)

• 81 du type m_10d_10

(dans ce cas $m_1 = m - u$; $d_1 = d - c$, $DI = 999\,m_1 - 90\,d_1$)

On trouve l'explication des cycles :
• lorsque $c_1 = 0$ ou $d_1 = 0$, on retrouve des multiples de 999 ;
• lorsque $m_1 = 0$, on retrouve des multiples de 90 ;
• lorsque $m_1 = c_1$, on retrouve des multiples de 1089 ;
• lorsque $m_1 = d_1$, on retrouve des multiples de 909.

A partir de ce tableau, on démontre un ensemble de propriétés générales :
— une symétrie de centre (5 ; 5) pour les différences des nombres du type m_1c_100 ;
— une symétrie de centre (11/2 ; 11/2) pour les différences des nombres du type m_10d_10 (excepté pour $m_1 = 1$ ou $d_1 = 1$)

Dans le tableau, on n'a pas indiqué les cas où m_1, c_1 ou d_1 sont égaux à 0, puisqu'on retrouverait directement des cycles.

On a ensuite démontré un ensemble de règles, qui permettent, sans le tableau, de trouver le cycle et le nombre de calculs :

• si c et m sont dans la même position par rapport à 5 (c'est-à-dire tous deux inférieurs à 5 ou tous deux supérieurs à 5), alors

$$c_1 = |10 - 2\,c|,$$

sinon

$$d_1 = |10 - 2\,c|.$$

et :

$$\forall\, m,\ m_1 = |10 - 2\,m|.$$

• si d et m sont dans la même position par rapport à 11/2, alors

$$d_1 = |2\,d - 11|,$$

sinon

$$c_1 = |2\,d - 11|.$$

et :

$$\forall\, m,\ m_1 = |2\,m - 11|.$$

en conclusion

On tient deux raisonnements en parallèle : l'un par le calcul, l'autre grâce aux règles indiquées.

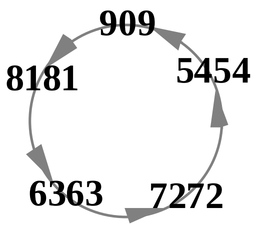
exemple :

9311	8172	5454	9090	8181	6363	7272
-1139	-2718	-4545	-0909	-1818	-3636	-2727
8172	5454	0909	8181	6363	2727	4545

simplification (calcul) : 9311 - 1111 = 8200
8 > 5 > 2, donc :

$$m_1 = |10 - 16| = 6$$
$$d_1 = |10 - 4| = 6$$

$m_1 = d_1$, on entre donc dans le cycle des multiples de 909.



notabene : on n'a pas réussi à démontrer qu'il n'existait que quatre cycles. On l'a néanmoins vérifié.

avec des nombres à cinq chiffres

Comme pour trois et quatre chiffres, on suit une méthode similaire ; on peut noter que lorsqu'on simplifie par des nombres symétriques, le chiffre du milieu (le troisième) se trouve annulé, d'où la similitude des résultats avec les nombres de quatre chiffres.

62533	30**0**10	3010
- 32523	- 1**0**03	- 103
30010	29**0**07	2907

En fait, on a rajouté un 0 au milieu.

à partir de six chiffres

Le nombre de cycles et de résultats croît de façon exponentielle.