les arbres

par Uta Ta, Elinne Lin, Raphaël Nicolle, Jérome Hernandez et Siek-Hor Lim, du collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93) et du collège André Doucet de Nanterre (92)

enseignants : Martine Brunstein, Danielle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, Pierre Lévy

chercheur : Jacqueline Zizi

Compte-rendu de l'exposé par les parrains du groupe : **CLG L. Bouland**

Comment constituer un arbre ? [NDLC : *pour faire un arbre, mon Dieu que c'est long !*] C'est un objet que les informaticiens utilisent beaucoup paraît-il. Nous pouvons définir deux opérations sur les arbres : en particulier nous les avons utilisés pour parcourir un labyrinthe. Simplification d'un arbre (sous forme de calcul), plus facile à comprendre, à calculer sa hauteur, son nombre de branches, son nombre de feuilles. [NDLR : voir l'article sur les labyrinthes, page 103.]

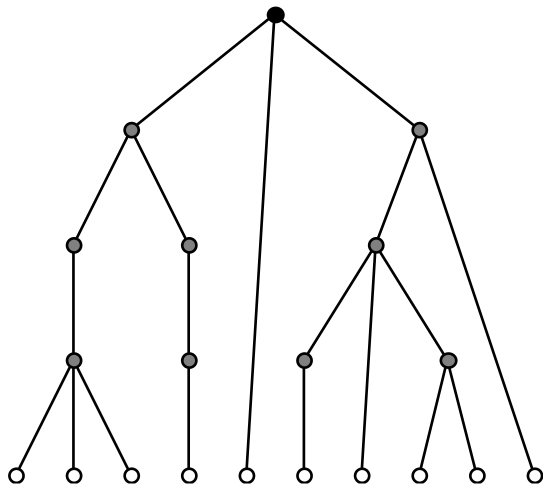
[NDLR : voici le texte donné aux élèves en début d'année (des dessins étaient annexés ; la place manque ici.) :] Ce sujet est une vulgarisation des travaux de J. Bénabou exposés au séminaire de recherche sur la théorie mathématique des catégories. En suivant les deux opérations fondamentales sur les entiers, somme et successeur, considérer sur les arbres tels que les utilisent les informaticiens, les deux opérations suivantes: + qui consiste à faire un arbre à partir de deux autres en joignant les sommets ; la fonction *suivant* qui à un arbre fait correspondre le suivant. En comparant avec les entiers naturels, la somme et la fonction suivant, déterminer les propriétés des opérations sur ces arbres. Quelles sont les propriétés des entiers qui sont conservées ? Quelles sont celles qui ne le sont pas ?

Définir la hauteur d'un arbre, le nombre de nœuds et le nombre de feuilles à l'aide des opérations précédentes.

On peut coder un arbre donné à l'aide de ces deux opérations. Faire remarquer que, pour les arbres, le suivant de 1 n'est pas 2. Dessiner un arbre quelconque et trouver son codage. Donner un codage quelconque et trouver l'arbre correspondant. Trouver un codage plus simple sous la forme d'une suite de 0 et de 1 qui permette de définir un arbre. Réciproquement, une suite de 0 et de 1 étant donnée, quel est l'arbre qui y correspond ? Existe-t-il des cas où la suite ne peut pas représenter un arbre ? Comment peut-on caractériser les suites qui représentent des arbres ? Ecrire un petit programme dans un langage de programmation quelconque qui permette de dire si une suite donnée de 0 et de 1 est un arbre et qui permette de construire graphiquement l'arbre à partir de la suite de 0 et de 1.

Etes-vous sûr de bien connaître les arbres ?

En voici un !



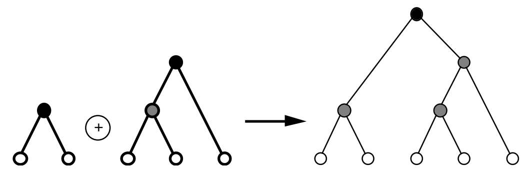
Etonnant, non ? En fait, c'est un objet que les informaticiens utilisent beaucoup paraît-il.

Nous pouvons définir deux opérations sur les arbres : "somme" et "successeur". Grâce à ces deux opérations fondamentales, nous allons complètement caractériser les arbres.

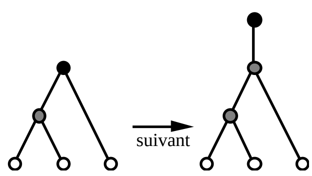
De plus, ces deux opérations existent dans le monde des entiers ; il donc intéressant de comparer leurs propriétés respectives dans ces deux domaines.

Voici la description de ces deux opérations :

• Addition de deux arbres :



• Suivant d'un arbre :



Au début nous ne savions pas par où commencer. Alors, nous avons décidé d'étudier l'arbre par sa représentation. Mais cela ne nous avait menés à rien. **Car nous nous sommes vite (cela a pris 3 mois !) rendu compte qu'aucune de nos questions n'avait été résolue :**

— Des dessins différents représentent-ils toujours des arbres différents ?

— Un arbre est-il identique à son "symétrique" ?

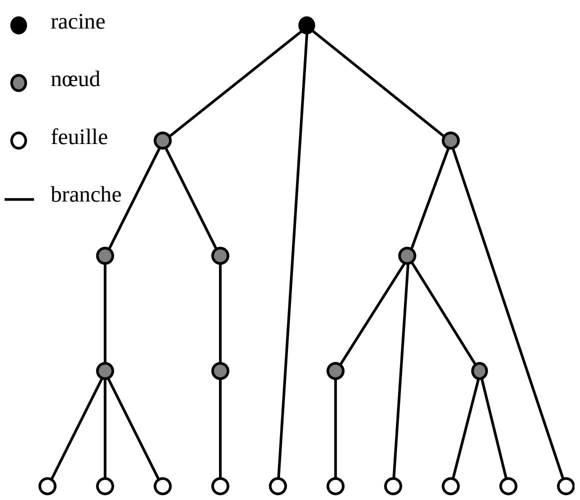
— L'addition des arbres, est-elle commutative ? associative ? Les arbres ainsi obtenus, sont-ils semblables ?

Ces questions suscitèrent, pendant longtemps, de longues discussions entre nous.

[NDLR : comme les élèves l'ont très bien compris, leur premier travail était de définir *les objets* avec lesquels ils travaillaient. Un de ces *objets* est l'*égalité* : quand dit-on que deux arbres sont égaux ? (Ce qui rejoint la première question : des dessins différents représentent-ils des arbres différents ?)]

C'est seulement **après le premier séminaire** que nous nous sommes décidés à établir un vocabulaire précis pour décrire des arbres ; nous mettions, alors, fin à une période de doutes (enfin … presque !).

Les points se trouvant au niveau inférieur s'appellent les *feuilles*. Ces feuilles sont reliées à des noeuds par des segments que nous appellerons *branches*. Le dernier noeud obtenu s'appelle la *racine* de l'arbre.



Mais cela n'a pas suffi : il fallait encore manier des représentations parfois énormes et souvent illisibles.

Nous avons alors imaginé un autre moyen de caractériser les arbres. Cet outil, c'est *le codage.* Il lui est unique : c'est ce qu'on va essayer de démontrer plus loin. Mais d'abord, nous allons le décrire.

Voici les *règles de codage* :

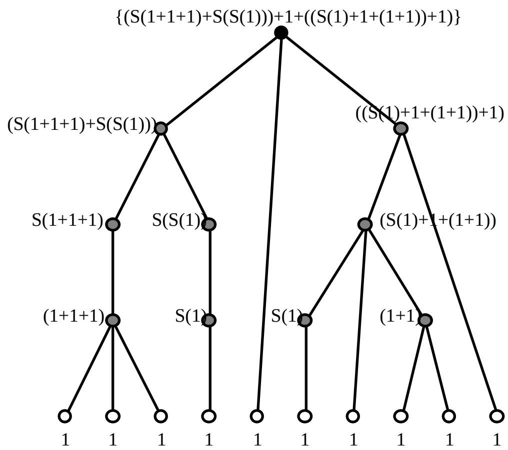
• Chaque feuille sera codée 1.

• Le suivant de 1 sera noté S(1).

• On utilise le signe + (comme pour les nombres) pour désigner la somme de deux arbres.

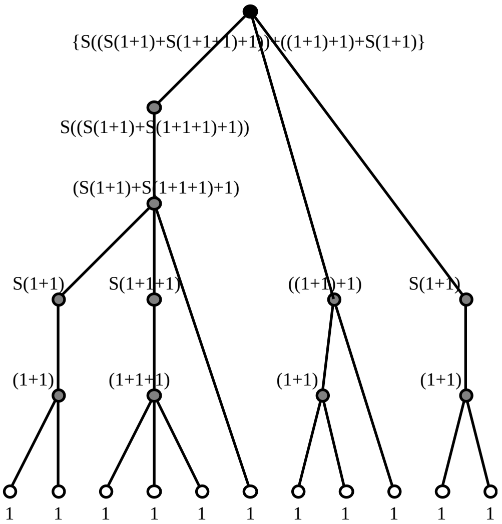
Voici comment on code un arbre à l'aide de ces règles de base. On parcourt l'arbre des feuilles vers la racine en codant chaque noeud.

Voici comment on obtient la formule codant notre premier exemple d'arbre. **La formule finale est obtenue à la racine.**



Il est bien entendu possible de reconstruire un arbre à partir de son codage. Il faut respecter le sens de lecture (*de gauche à droite* et *des feuilles vers la racine*).

Exemple :
{ S(S(1 + 1) + S (1 + 1 + 1) + 1) + ((1 + 1) + 1) + S(1 + 1) } correspond à l'arbre suivant :



A un arbre correspond donc [?] un et un seul codage ; à un codage correspond un arbre unique. [NDLR : affirmation … conjecture ou théorème ?] Il est donc désormais tout à fait inutile d'avoir la représentation graphique d'un arbre pour le caractériser complètement. Travaillons sur un codage pris au hasard :

{ 1 + [S(S(1)) + (1 + (1 + 1)) + 1] }

Il est facile de connaître **le nombre de branches** de l'arbre associé :

• Sachant qu'un suivant donne 1 branche, on compte le nombre de "S". [2]

• On compte alors les termes contenus dans les parenthèses les plus à l'intérieur. [2]

• On compte les termes contenus dans les parenthèses "suivantes". [2]

• On compte les termes à l'intérieur des crochets. [3]

• Enfin, on compte les termes à l'intérieur des accolades.[2] On additionne le tout (2+2+2+3+2) et on trouve 11 branches.

De même, on peut connaître **la hauteur de l'arbre** (la *hauteur* d'un arbre est le nombre maximum de branches consécutives) :

On compte le nombre de "niveau de parenthèses". Chaque "niveau correspondra à un "étage" de l'arbre. Les parenthèses les plus à l'intérieur correspondent au premier niveau et ainsi de suite.

Dans ce codage, il y a 4 niveaux de parenthèses ; la hauteur de l'arbre correspondant est 4.

Pour connaître **le nombre de feuilles**, il suffit de compter le nombre de 1 dans l'expression.

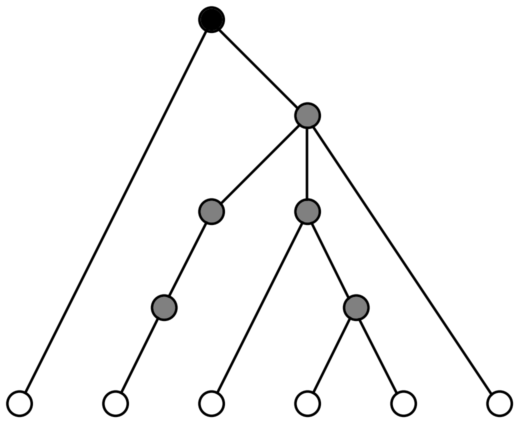
Dans l'exemple, l'arbre possède 6 feuilles.

Pour connaître **le nombre de noeuds** (y compris la racine), on a remarqué qu'un « S » donne un nœud supplémentaire et ainsi qu'une somme (de deux ou plusieurs termes) située dans une paire de parenthèses.

Dans notre exemple, le nombre de noeuds est 6 (y compris la racine).

Vérifions tout de même en construisant l'arbre correspondant à la formule :

{1+[S(S(1))+(1+(1+1))+1]}

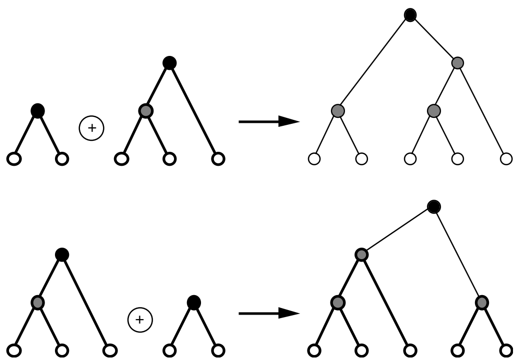


[NDLR : comme calculé, il y a bien 6 feuilles, 6 nœuds dont la racine, 11 branches ; la hauteur est bien 4. La méthode de comptage est correcte sur cet exemple.]

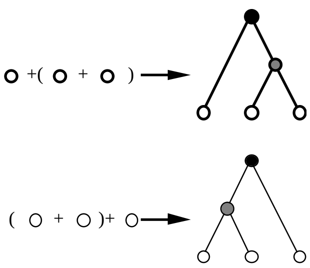
arbres et entiers

Afin de terminer notre étude, nous avons comparé l'addition et la notion de suivant dans le monde des arbres avec l'addition et la notion de successeur des entiers.

La somme des arbres n'est pas commutative c'est-à-dire que si l'on permute les deux arbres que l'on ajoute, on obtient un arbre différent.

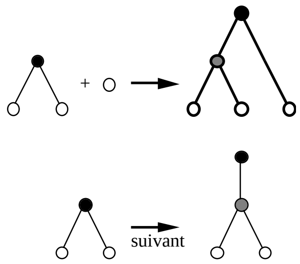


La somme des arbres n'est pas non plus associative. Pour s'en convaincre, il suffit d'ajouter 3 arbres réduits à une feuille. En déplaçant les parenthèses puis en les supprimant, on obtient 3 arbres différents.



Il n'existe pas dans les arbres de "terme nul", c'est-à-dire un arbre qui, lorsqu'on l'ajoute à n'importe quel autre arbre, ne le modifie pas.

Prendre le suivant d'un entier, cela revient à lui ajouter 1. Dans les arbres cela n'est pas vrai.



Dans les arbres comme dans les entiers, le suivant est unique.

Nous n'avons pas réussi à définir une relation d'ordre dans le monde des arbres ce qui nous aurait permis de trouver des correspondances précises avec les entiers. Notre année de recherche se termine donc sur une question ouverte qui trouvera peut-être un jour sa réponse.

[NDLR : à propos du travail de ce groupe d'élèves, voir l'article de J. Zizi, page 239.]

[NDLR : Les objets appelés "arbres" ici sont exactement ceux qui sont engendrés par une famille d'opérateurs (branchement de k branches dans un ordre précis à un seul sommet). Les spécialistes reconnaîtront les "arbres plans avec racine" ou "arborescences planes".]