longueurs, aires, volumes : le tore

d’après Chave, Balducci, El Bahraoui, Miloud-Ali, Guenaiche, élèves du module-recherche de 2° du lycée Pablo Neruda de Saint Martin d’Hères (38)

enseignant : Jean-Claude Oriol

chercheurs : Pierre Duchet et Charles Payan

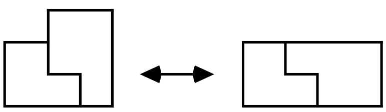
[NDLR : au lieu d’un article en bonne et dûe forme, les élèves ne nous ont fourni qu’un condensé brut de leur cahier de recherche (qui est constitué de brefs comptes-rendus de chaque séance). Convaincus de l’intérêt des recherches effectuées, nous avons accompagné les documents par les commentaires des chercheurs. Le sujet initial fourni par les chercheurs était présenté comme suit.]

Longueurs, aires, volumes : avec quel volume nagez-vous ? Quelle est la quantité d’air dans une bouée ? Ou, en langage plus savant :

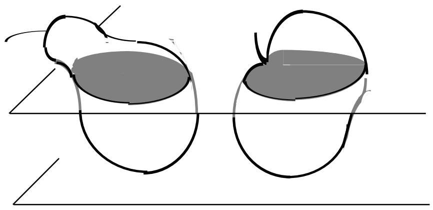
☞ Peut-on trouver le volume d’un tore ?

Trois idées importantes, découvertes au fil des siècles permettent de mesurer des longueurs, des aires, des volumes … :

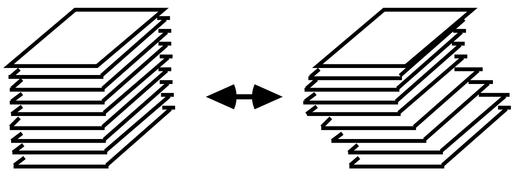
Découpage. *Des formes équivalentes par découpage ont même mesure.*
Ainsi, si on coupe une surface en morceaux et que l’on réassemble les morceaux autrement, on obtient une forme de même aire (exemple ci-dessous). La même propriété est valable pour les volumes.



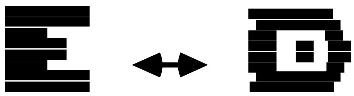
Déformation de tranches parallèles.
Une déformation qui préserve la mesure des couches parallèles conserve la mesure totale (Principe de Cavalieri).
Expliquons le principe dans le cas des volumes : deux objets volumiques (par exemple une pomme et une poire) sont posés sur un plan horizontal.



On suppose que à chaque fois que l‘on coupe les corps **à la même hauteur**, on obtient **deux aires égales**. Alors les deux corps ont le même volume. Un exemple familier est celui d’un jeu de carte :



Pour le cas des surfaces planes (on peut choisir l’ombre d’un jeu de carte ou d’une poire, d’une pomme, si vous préférez) on a le principe suivant : les coupes horizontales qui sont à la même hauteur ont toujours même longueur, les surfaces ont même mesure.



Changement d’échelle (Agrandissement, rétrécissement.) : *si les dimensions d’un corps sont multipliés par un même nombre* $\boldsymbol{a}$ *(l’objet est ainsi agrandi ou rétréci) alors :*
— les longueurs sont multipliées par $\boldsymbol{a}$
— les aires sont multipliées par $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = a^2$
— les volumes sont multipliés par $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = a^3$
Par exemple, si les dimensions d’un corps sont multipliées par 2 (l’objet est, apparemment, deux fois plus grand), alors les longueurs sont multipliées par 2, les aires par 4, les volumes par 8.

A quoi ça sert ?
Les “tores” sont des formes simples intervenant dans de nombreux usages ou fabrications industrielles : chambres à air et pneus, anneaux, tuyaux, conservation de plasmas… La connaissance du volume permet de choisir des dimensions appropriées (exemple : la charge que peut soutenir une bouée sans couler dépend du volume de la bouée). En mathématiques, des idées simples sont souvent très efficaces : jusqu’où peut-on aller en combinant les trois principes présentés plus haut ?

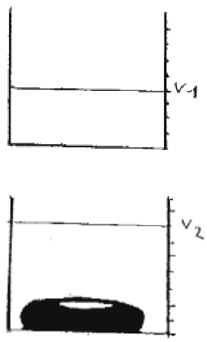
TEXTE

définition du tore

Solide de révolution engendré par un cercle tournant autour d'une droite située dans son plan mais ne passant pas par son centre. [NDLR : L'axe de révolution doit en outre ne pas rencontrer le cercle, si on souhaite une surface sans croisement.]

Peut-on trouver le volume d'un tore ?

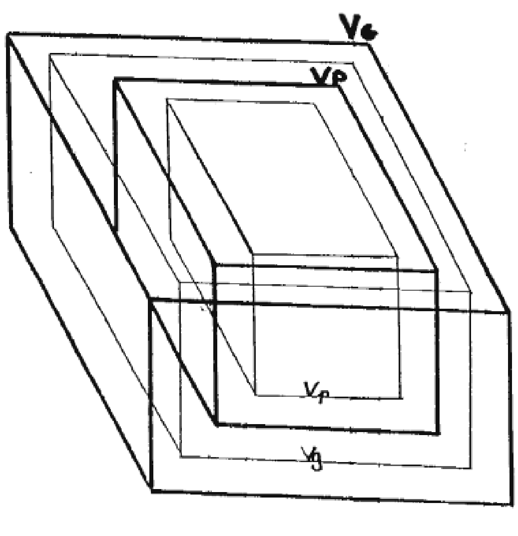
Solution de la bassine d'eau graduée :



$$V_{Tore} = v_2 - v_1.$$

Après avoir rempli d'eau la bassine, on immerge le tore [NDLC : et la bassine déborde ...] et on note la différence des deux niveaux pour trouver le volume. Cette méthode est une méthode de vérification.

Encadrement du volume d'un tore :
(cette méthode n'est pas vérifiée)



$$v_g - v_p < V < v_G - v_P.$$

COMMENTAIRES

Cette définition (courante) ne va pas de soi et induit déjà une conception particulière du tore chez les élèves : elle oriente (nous en faisons l'hypothèse) le début de la recherche dans le sens du découpage en tranches limitées par des plans radiaux (= passant par l'axe de révolution), au détriment du découpage en tranches horizontales.

Le fait d'avoir fourni aux élèves un texte de sujet où le principe de Cavalieri est énoncé en second, après le principe de découpage, ne fait que renforcer les représentations radiales du tore. Le fait que la présentation orale ait présenté Cavalieri en premier fut sans effet.

La solution de la bassine pose une vraie question : pourquoi les mathématiques ? Nous ne pensons pas qu'il faille éviter ce type de question. La pertinence de la réflexion mathématique (≈ la pertinence du modèle) fut l'objet de discussions avec le groupe ; le gain en généralité fut l'argument que nous développâmes le plus aux élèves.

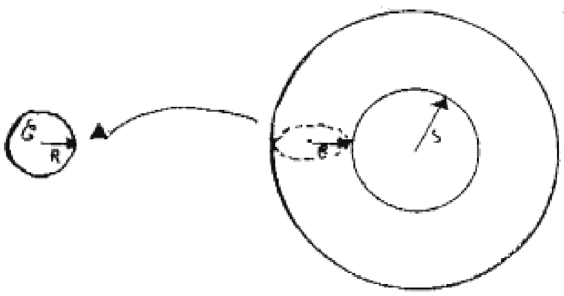
La bassine est aussi stratégie d'évitement d'une très cruciale difficulté mathématique : le "paramétrage". Cette difficulté est en fait commune à de très nombreuses situations du type "problème ouvert" où un itinéraire de résolution n'est pas indiqué à l'avance, mais elle est aussi présente dans moult exercices accompagnant les cours. La question du paramétrage est la suivante : ***en fonction de quoi*** va-t-on calculer le volume du tore ? Quelles sont les quantités, les mesures de base qui font varier le volume du tore, et qui le déterminent ? De combien de mesures a-t-on besoin pour organiser les calculs ?

Ce type de difficultés est d'abord contourné par une stratégie d'encadrement par des volumes plus simples (pour lesquels le calcul volumique est connu). L'utilisation de boîtes est à cet égard significative : l'idée est de placer à l'intérieur du tore un volume prismatique v_{min} dont la base est une "couronne carrée" et de placer le tore à l'intérieur d'un volume similaire v_{MAJ}. Les volumes respectifs sont obtenus par différence des volumes de deux boîtes.

La comparaison des grandeurs l'ayant emporté sur les propriétés d'inclusion, le dessin proposé ici par les élèves a interverti les placements de v_p et de v_P qui sont les parties intérieures de v_{min} et de v_{MAJ} respectivement.

Notons que l'encadrement n'est valable que si les hauteurs choisies sont différentes (ce qui ne fut pas remarqué par le groupe).

TEXTE — *COMMENTAIRES*



Le problème du paramétrage fut résolu après une discussion entre un élève et son père qui donna l'idée du pied à coulisse pour mesurer des anneaux.

Ici R désigne le rayon du cercle générateur du tore et S celui du trou du tore.

Conjecture :

$$V_{TORE} : \pi R^2 \left(\frac{2\pi S + 2\pi (S + 2R)}{2} \right)$$

$$V_{TORE} : 2\pi^2 R^2 (S + R)$$

Cette conjecture fut obtenue en voyant *le tore comme la déformation d'un cylindre* (ce fut l'aboutissement d'une discussion très active au sein du groupe, les conceptions spatiales n'étant pas les mêmes chez les élèves).
La forme choisie pour faire un tore fut un cylindre doublement biseauté dont on recolle les bords opposés (imaginant de la pâte à modeler, la déformation se fait intuitivement à volume constant). L'axe, après courbure donne le cercle décrit par le centre du cercle générateur du tore.
La section verticale médiane de ce tronc cylindrique étant un trapèze, la règle de calcul conjecturée fut la même : prendre pour "hauteur" du tronc la moyenne entre la plus petite et la plus grande hauteur.

Après des recherches au CDI dans *le Grand Larousse Universel*, n° 14, p. 10293 (édition 1985), volume trouvé :

$$V_{TORE} : 2\pi^2 R^2 d$$

Le paramétrage et les notations du Larousse étant différents, les élèves n'ont pas d'emblée trouvé confirmation de leur conjecture. Ils ont dû réexaminer leur formule et apprendre à l'arranger (la distributivité et la mise en facteur n'étaient pas des techniques usuelles dans leurs pratiques).

On a $d = S + R$ = distance de centre du cercle C à l'axe de révolution. On a donc :

$$V_{TORE} : 2\pi^2 R^2 d \text{ ou } 2\pi^2 R^2 (S + R)$$

Cette conjecture correspond bien à la formule trouvée au CDI.

Quelle ne fut pas leur joie de trouver finalement que leur formule était dans le Larousse!

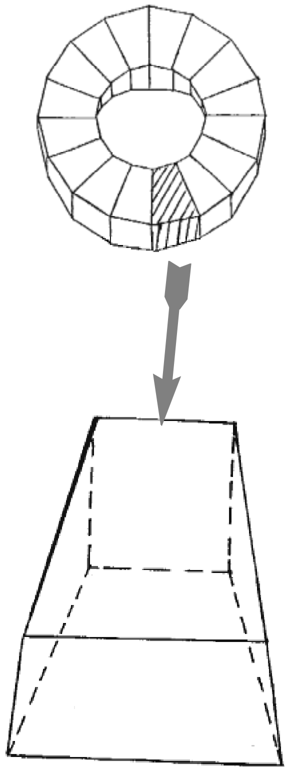
Enhardis par ce succès, ils acceptèrent notre suggestion de tenter de prouver l'exactitude de la formule…

TEXTE — *COMMENTAIRE*

Valeur approchée du volume du tore :

Après avoir trouvé une formule, nous cherchons des moyens pour trouver le volume exact ou approché (encadrements, découpage, déformation, …)

…tout en dédaignant à nouveau la piste du principe de Cavalieri et en y préférant l'approche par découpage.



Les élèves ne se sont pas intéressés à des formes rondes (rondelles, couronnes) plus appropriées en fait à leur problème : ils voient une possibilité calculatoire moins coûteuse pour eux avec des trapèzes et nous (professeur et chercheurs) les encourageons à poursuivre dans cette voie.

Constatons que le découpage n'est introduit que pour le calcul et non pour réarranger les morceaux.

Des difficultés lexicales liées aux mots "prisme", "hauteur", "base", ont conduit à des confusion puis à un non sens. En effet :

$$V = \left[\frac{(\textit{grande base} + \textit{petite base}) \times \textit{hauteur}}{2}\right] \times 16$$

- le mot *prisme* (ici à base trapézoïdale) n'est pas usuel pour les élèves ; ils utilisent volontiers le même mot (trapèze) pour la forme plane et la forme tridimensionnelle.
- le mot *épaisseur* n'est pas disponible.
- *base* du trapèze vs *base* du prisme.
- *hauteur* du trapèze vs *hauteur* du prisme.
- aire du trapèze = *moyenne des bases* × hauteur;
- volume du prisme = *base* × hauteur.

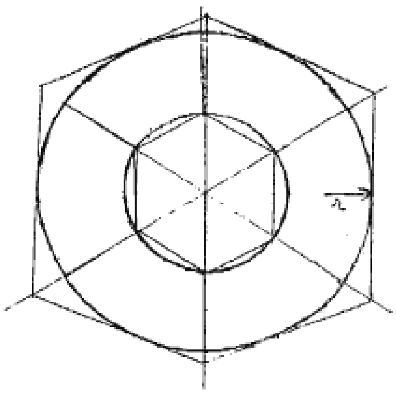
[NDLR : le lecteur aura compris que tous les “trapèzes” dont il est question ici ont une certaine épaisseur … c'est cette épaisseur qui a été oubliée dans la formule ci-dessus]

Plus on augmente le nombre de trapèzes et plus on se rapproche du volume du tore.

On se rapproche du volume du tore mais pas autant qu'on voudrait ! On s'approche en fait d'une rondelle circulaire.

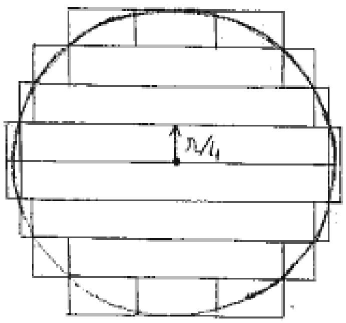
TEXTE *COMMENTAIRES*

Pour un tore coupé en 6 trapèzes :



La suggestion d'un découpage en 6 morceaux vient du professeur (intention de faire réviser les cosinus des angles simples ?).

vu de dessus → 6 morceaux en forme de trapèzes, qui encadrent le volume du tore coupé lui-même en 6 morceaux.

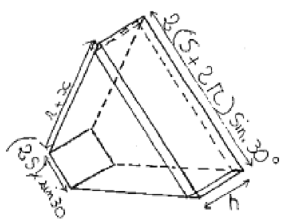


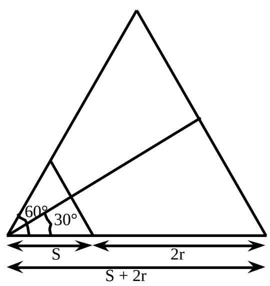
Les chercheurs ayant proposé 8 morceaux (ayant √2 en tête ?) pour le découpage vertical, c'est ce nombre qui fut retenu par le groupe pour le découpage horizontal !

Entre temps, les notations ont changé : R est maintenant remplacé par r.

verticalement : 1 morceau → 8 "trapèzes" de [même épaisseur] $h = r/4$.

[NDLC : mais bases et hauteur varient d'un trapèze à l'autre.]

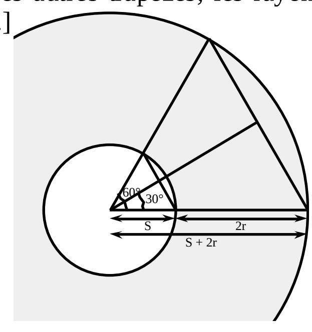




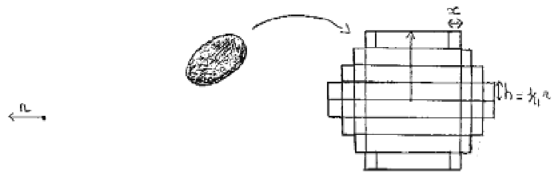
On peut calculer la base moyenne des trapèzes médians (S désignant le rayon du cercle intérieur, $S + 2r$ le rayon du cercle extérieur) :

$$\frac{2\,(S + 2\,r)\sin 30 + (2\,S)\sin 30}{2}$$

[NDLR : mais ce calcul ne donne ni le "volume mini", ni le "volume maxi". Le volume calculé correspond à un trapèze dont la petite base est hors du tore (dans le trou) et la grande base est dans le tore … le volume calculé est intermédiaire entre le "volume mini" et le "volume maxi", et seulement pour les deux trapèzes médians. Pour les autres trapèzes, les rayons ne sont plus S et $S + 2\,r$.]

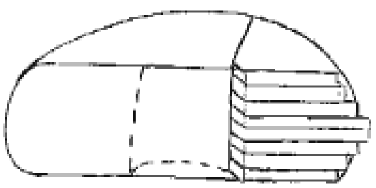


TEXTE



donc 1 morceau = 8 × le volume du trapèze (= V_{maxi})

[NDLC : on a affiné l'approximation du tore en divisant chacun des 6 morceaux en 8 couches (en formes de "trapèzes"). Au lieu de multiplier ici brutalement par 8, et afin d'obtenir un encadrement de chacun des 6 morceaux du tore, on pourrait se contenter de dire qu'il *faudrait* ajouter les volumes des 8 trapèzes maxi (après les avoir calculés), et de même pour les 8 trapèzes mini.]



donc tore = 6 (8 × $V_{\text{trapèze}}$) = $V_{\text{maxi tore}}$

$V_{\text{min tore}}$ = 6 (8 × $V_{\text{min trapèze}}$)

$V_{\text{tore}} = V_{\max} - V_{\min}$

Conclusion

La connaissance du volume permet de choisir des dimensions appropriées (ex : la charge que peut soutenir une bouée sans couler dépend du volume de la bouée).

Nous avons trouvé la formule du tore. Nous avons laissé tomber le principe de Cavalieri.

[NDLC : les chercheurs le rattrappent ci-contre, avant qu'il ne se fasse mal.]

COMMENTAIRE

A partir de là le texte ne contient que des bribes de brouillon écrits à la hâte (où paraissent de nouveau les idées d'encadrement antérieures).

C'est bien le temps et seulement le temps qui leur a manqué pour arriver au bout d'un calcul d'approximation dont ils percevaient à la fois la faisabilité et l'énormité :

1- application de Pythagore pour avoir les bonnes mesures de chaque couche.
2- passage à l'écriture littérale pour une division en n couches.
3- étude du "passage à la limite"en augmentant le nombre de couches.
4- augmentation du nombre de morceaux (l'erreur du calcul d'aire précédent devenant alors négligeable).
5- nouveau passage à la limite.

Le groupe pressentait que la preuve du volume du tore était accessible par cette voie.

Et le principe de Cavalieri ?

Les élèves n'ont effectivement pas voulu regarder le principe de Cavalieri. Une preuve intéressante de la formule du volume du tore peut être obtenue par ce principe : il s'agit de montrer, conformément à la conjecture des élèves, que le volume du tore T est égal à celui d'un cylindre droit C de rayon r et de longueur 2πd. En mettant chacun de ces volumes "à plat" sur un même plan horizontal (l'axe du tore étant alors vertical, celui du cylindre horizontal) et en coupant horizontalement, il est facile de vérifier que les sections à même hauteur ont même aire. Les volumes de T et C sont donc identiques.

Archimède (Cavalieri n'était pas encore né) appliquait essentiellement la même méthode pour exprimer *le volume de la sphère comme différence entre le volume d'un cylindre et celui d'un cône …*

[NDLR : voir aussi page 220.]