les puits dans le désert

par Gaëlle Baldassari (3ème), Stéphane Gougerot (3ème), Clément Imbert (4ème) et Stéphane Mayaut (5ème), élèves du collège l'Ardillière de Nézant de Saint-Brice (95)

enseignant : Yann Bourit et Hervé Grac

chercheur : Pierre Duchet

Compte-rendu de l'exposé par les parrains du groupe : **lycée G. Braque**

— Il s'agissait de trouver le tracé le plus simple afin de relier plusieurs points avec le moins de "cables" possible. Pour plus de précisions, il faut consulter le résumé du congrès et les panneaux (très bien) des élèves.

— Il est très regrettable que seul un nombre très restreint de collégiens ait pris la parole (8 participaient aux recherches …). Mais cela est valable pour tous les groupes. Ramener le problème à des puits dans le désert me semble un peu trop lointain ; ce qui amène l'occultation de l'aspect purement analytique. La recherche ressemble trop, vraiment trop, à un jeu. Je sais que MATh.en.JEANS vise à ce but, mais il ne faudrait pas trop s'éloigner du sujet.

Pour ma part, l'exposé des élèves semble avoir été clair. Le sujet étant accessible à tous, la possibilité de discussion avec le public a donc été accrue. Il est à noter que le petit défi proposé en fin d'exposé est très bien. [NDLC : quel sujet ? quel défi ?]

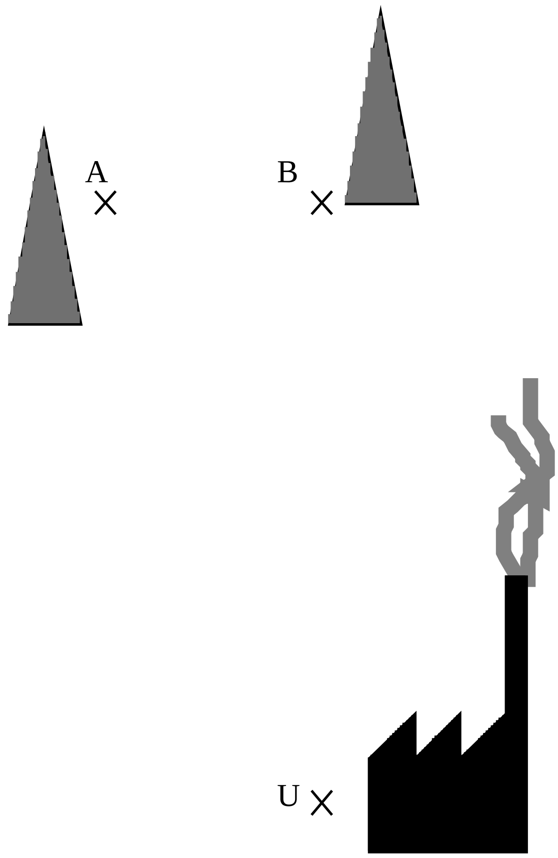
Les quelques élèves qui exposaient m'ont semblé dominer le sujet. Il est bien qu'ils ne soient pas déroutés quand on leur pose des questions. Il semble navrant que la hantise de la majorité des élèves à se voir poser des questions lors des exposés par d'autres élèves les amène à penser que ces derniers font cela pour ennuyer les premiers : c'est faux. Le but de MATh.en.JEANS est de faire partager des recherches, et pour cela discuter.

— Exposé très clairement présenté. Malheureusement le groupe n'a pas réussi à totalement conjoncturer une conclusion. [NDLC : je conjecture que ce compte-rendu tire une conclusion pas très clairement présentée]

— L'exposé fut très intéressant et bien construit. Il y a deux puits, une usine et l'on doit rejoindre les 2 puits à l'usine avec des pipe-lines. Donc on cherche le chemin le plus court. [NDLC : et on trouve … du pétrole ?]

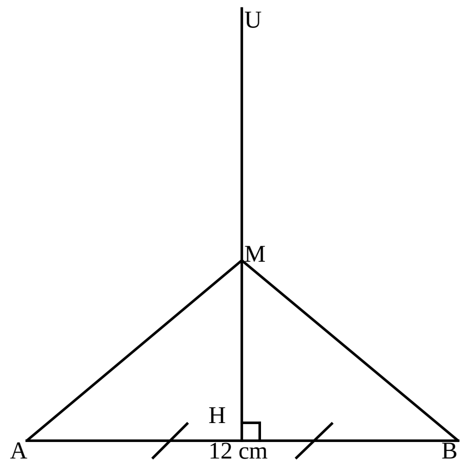
[**Note du chercheur.** Il est toujours surprenant de voir comment les élèves (et les autres …) s'approprient immédiatement une connaissance qu'ils ont conquise : ni le cosinus (même celui de 60°) ni le « théorème des angles inscrits sur un cercle » ne constituaient des connaissances disponibles au départ de l'activité de recherche.]

Imaginons dans le désert deux puits de pétrole (A et B) et une usine (U). Nous voulons acheminer le pétrole des points A et B jusqu'à l'usine U à l'aide de pipe-lines. Comment relier ces trois points avec le minimum de canalisations ?



triangle isocèle

Nous avons commencé nos recherches sur un triangle ABU isocèle en U dans lequel AB = 12 cm. On appelle H le milieu de A et B.



Appelons f la fonction qui à un point M quelconque fait correspondre $MA + MB + MU$.

On a supposé que cette fonction avait un minimum. La position de M où ce minimum est atteint est appelée m. Après quelques tâtonnements, nous avons supposé que m devait être sur (UH) l'axe de symétrie du triangle isocèle ABU ; nous avons déplacé M sur (UH) de cm en cm, puis de mm en mm, en calculant $f(M)$ à l'aide de la calculatrice, sachant que, d'après le théorème de Pythagore :

$$AM = BM = \sqrt{HM^2 + HB^2}$$

$$\text{et } UM = UH - UM$$

Nous avons trouvé ainsi que $3{,}4 < mH < 3{,}5$.

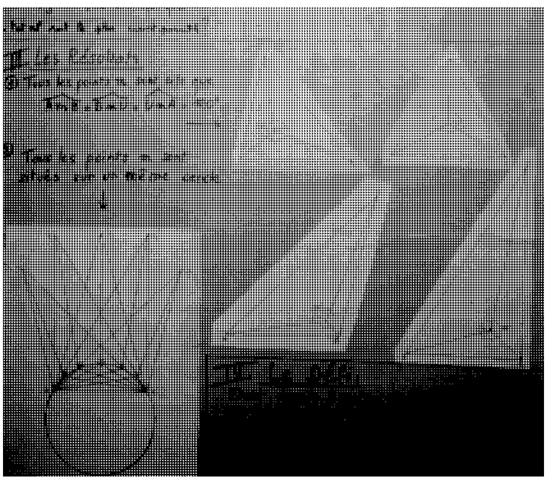
Pour aller plus loin, nous avons créé un programme sur le tableur de Works®, et nous avons trouvé que $mH = 3{,}464\ldots$ cm. Dans ce cas, $mA = 6{,}928\ldots$ d'où la **conjecture** :

$$mH = \frac{1}{2} \times mA$$

Il y a une autre manière d'énoncer cette propriété ; considérons le triangle mAH rectangle en H :

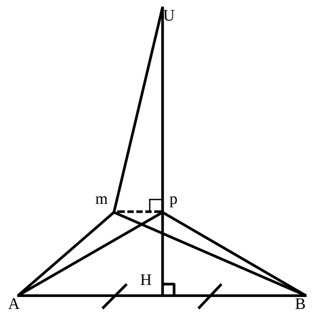
$$\cos \widehat{AmH} = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{mH}{mA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \widehat{AmH} = 60° = \widehat{BmH} \text{ et } \widehat{AmB} = 120°$$



Mais *m* est-il bien sur (*UH*) ?

Supposons que m n'appartient pas à (UH). Soit p le point de l'axe (UH) qui est le plus près de m (p est le projeté orthogonal de m sur (UH)).

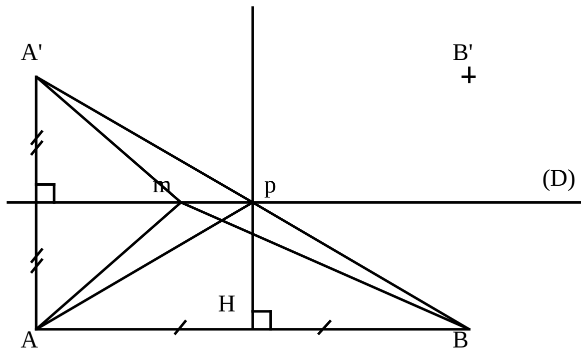


Propriété 1 : $pU < mU$

(la preuve est laissée en exercice)

Propriété 2 : $pA + pB < mA + mB$.

Preuve : Soit (D) la droite parallèle à (AB) et passant par m. Soit A' et B' les points symétriques de A et B par rapport à la droite (D).



$mA = mA'$ et $pA = pA'$ car deux segments symétriques ont même longueur. Donc : $pA + pB = pA' + pB = A'B$. D'autre part : $mA + mB = mA' + mB = A'm + mB$ et le plus court chemin entre deux points étant la ligne droite : $A'B < A'm + mB$ donc la propriété 2 est vraie.

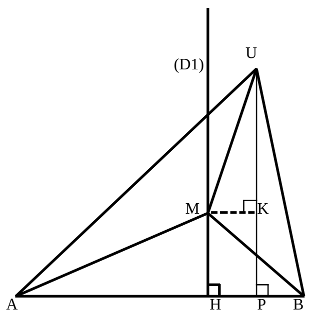
Conclusion : puisque les propriétés 1 et 2 sont vraies, $pA + pB + pU = f(p) < f(m)$, ceci est en contradiction avec la définition de m ; notre hypothèse est donc fausse, **et le point *m* est bien sur l'axe (*UH*)**.

triangle quelconque

Pour étudier des triangles quelconques, on a décidé que *AB* serait fixe et mesurerait 12 cm et que *U* se “balladerait”. Ensuite nous recherchons toujours le point *M* tel que *f*(*M*) soit minimum.

Méthode générale :

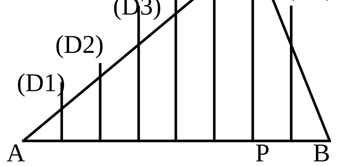
On a décidé de tracer une droite (*D*1) perpendiculaire à (*AB*). Nous appelons *H* le projeté orthogonal de *M* sur (*AB*), de ce fait *AMH* est



un triangle rectangle en *H*, et, d’après le théorème de Pythagore :

$$AM = \sqrt{AH^2 + MH^2}$$
$$BM = \sqrt{BH^2 + MH^2}$$
$$UM = \sqrt{UK^2 + MK^2}$$

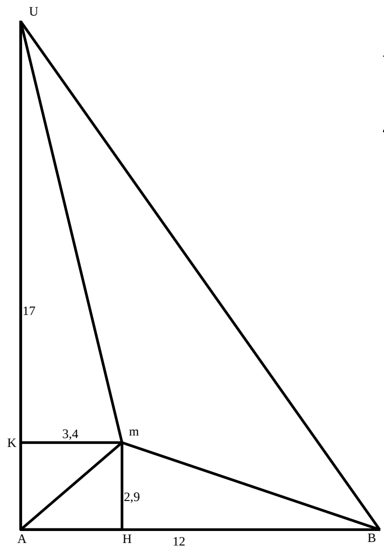
En faisant varier le point *M* sur la droite (*D*1), à l’aide du tableur de Works®, on a cherché, au mm près, le point *M*1 de (*D*1) tel que *f*(*M*1) soit le plus petit possible. Ensuite nous avons changé de droite perpendiculaire à (*AB*) et nous avons obtenu des minimums relatifs *M*1, *M*2, *M*3, etc …



Enfin, par tâtonnements, en modifiant mm par mm l’abscisse et l’ordonnée du point *M* on a trouvé le minimum absolu, *m*.

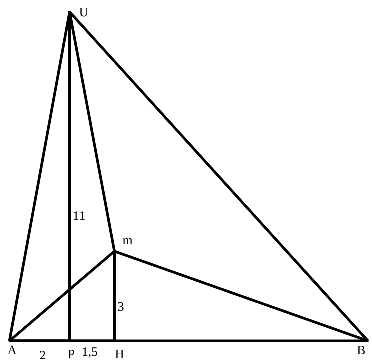
Présentation des différents résultats

Triangle rectangle :



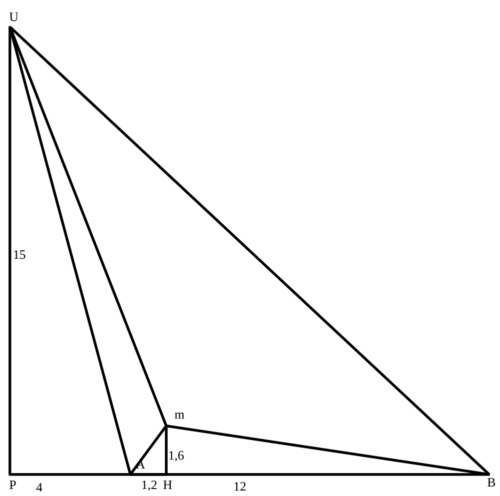
P = *A*
UA=*UP*=17 cm
AH = 3,4 cm
mH = 2,9 cm

Triangle avec 3 angles aigus :



UP = 11 cm
AP = 2 cm
AH = 3,5 cm
mH = 3 cm

Triangle avec un angle obtus :

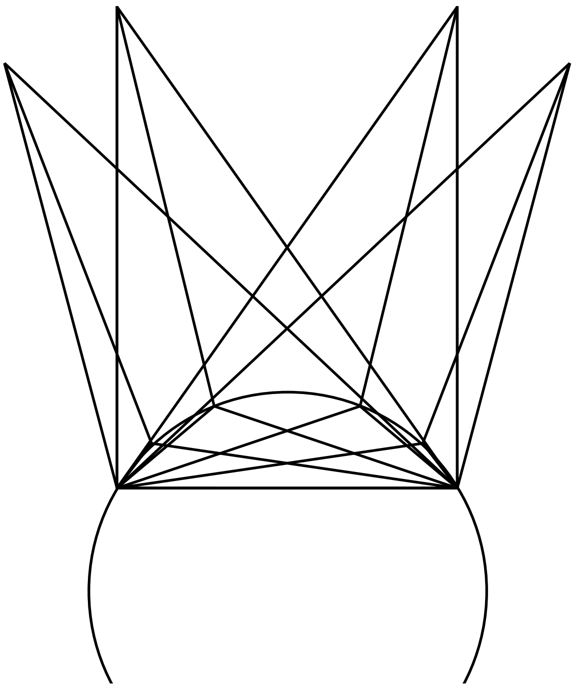


UP = 15 cm
AP = 4 cm
AH = 1,2 cm
mH = 1,6 cm

Conjectures
On a constaté en superposant tous les points *m* de ces triangles qu'à chaque fois,

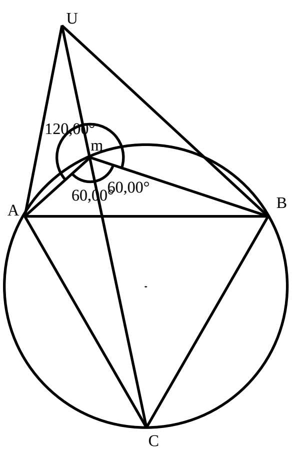
$$\widehat{BmA} = \widehat{BmU} = \widehat{UmA} = 120^{\circ}$$

En superposant les segments *AB* de tous ces triangles, on a constaté aussi que tous les points *m* étaient situés sur un même cercle.



D'où la question suivante : **comment tracer ce cercle ?**

Supposons ce cercle déjà tracé. Prolongeons la droite (*Um*) : elle coupe le cercle en *C*.



Sous l'hypothèse que

$$\widehat{BmA} = \widehat{BmU} = \widehat{UmA} = 120^{\circ}$$

on sait que

$$\widehat{CmB} = 180° - 120° = 60^{\circ}$$

donc, d'après le théorème sur les angles inscrits, sachant que les angles

$$\widehat{CmB} \text{ et } \widehat{CAB}$$

interceptent le même arc de cercle *AB* ils sont égaux et

$$\widehat{CmB} = \widehat{CAB} = 60^{\circ}$$

De même pour les angles

$$\widehat{ABC} \text{ et } \widehat{AmC}$$

Le triangle *ABC* a donc deux angles de 60°, son troisième angle mesure donc

180° - 60° - 60° = 60°.

ABC est donc un triangle équilatéral.

Pour trouver le point *m* il suffit donc de construire le triangle équilatéral qui s'appuie sur le côté *AB*, on appelle son troisième sommet *C*. On construit le cercle circonscrit à *ABC*, le point *m* est le point d'intersection entre le cercle et la droite (*UC*).

[NDLR : lors du congrès, le défi lancé par ce groupe d'élèves aux autres congressistes était de *relier quatre points disposés en carré de la manière la plus courte possible*. Si ça vous tente, à vous …]