cercles et triangles

par Sothi Mok, Monirath Ngor et Raymond Ros, du collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93) et du collège André Doucet de Nanterre (92)

enseignants : Martine Brunstein, Danielle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, Pierre Lévy

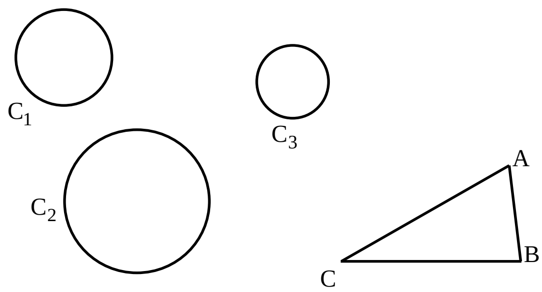
chercheur : Jacqueline Zizi

Compte-rendu des exposés par les parrains du groupe : **lycée L. Michel**

La classe du collège Victor Hugo de Noisy-le-Grand nous a présenté un exposé sur les cercles et les triangles, leur objectif étant de déterminer les conditions nécessaires pour qu'un triangle avec ses trois sommets soit relié à 3 cercles.

Etant donnés trois cercles C_1, C_2 et C_3 et un triangle *ABC*, il s'agit de déterminer les positions possibles du triangle tel que chacun des trois sommets soit sur l'un des cercles. Cet énoncé semble assez simple a priori, mais il ne faut pas s'y fier !

Voici un premier exemple :



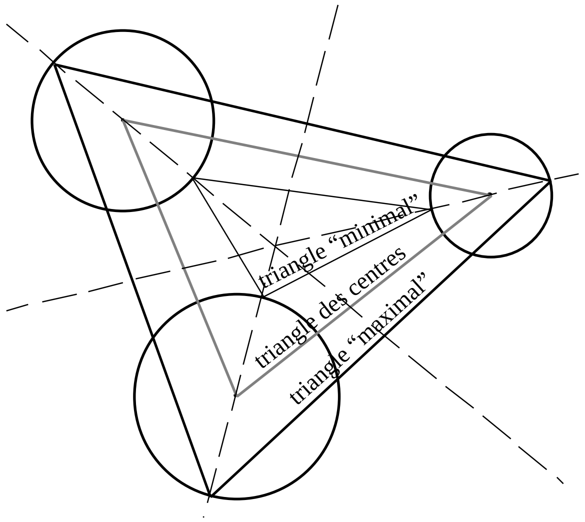
êtes-vous capable de placer le triangle de telle sorte que chacun de ses sommets soit exactement sur un cercle ?

Nous aussi nous avons commencé par manipuler des triangles tracés et découpés sur du carton. Chaque fois que l'un d'entre nous pensait avoir trouvé une position correcte, il devait la faire accepter par les autres. Comment en effet, pouvions-nous être sûrs que les sommets étaient parfaitement sur les cercles ? D'autre part, nous nous sommes vite rendu compte que pour un même triangle, il existait parfois plusieurs positions qui semblaient convenir.

Nous avons aussi remarqué que certains triangles ne conviendraient jamais car ils possédaient des côtés trop longs ou trop courts. Nous avons eu alors l'intuition qu'il existait une distance minimale et maximale pour la longueur des côtés du triangle une fois les cercles et leur position choisis.

A ce stade de notre recherche, nous avons utilisé un logiciel "Le Géomètre", ce qui nous a permis de travailler plus vite et d'avoir de très nombreux exemples. Nous avons choisi au hasard trois cercles de rayons quelconques (non sécants) et nous avons commencé par tâtonner à l'aide du logiciel. Nous avons alors cherché le "plus petit" et le "plus grand" triangle possible qui conviennent.

Nous avons tracé les bissectrices du triangle formé par les centres des trois cercles.



Les intersections entre ces bissectrices et les cercles déterminent deux triangles : notre première ***conjecture***, est que le triangle “en trait fin” possède le plus petit périmètre de tous les triangles qui conviennent et que celui qui est “en gras” possède le plus grand périmètre.

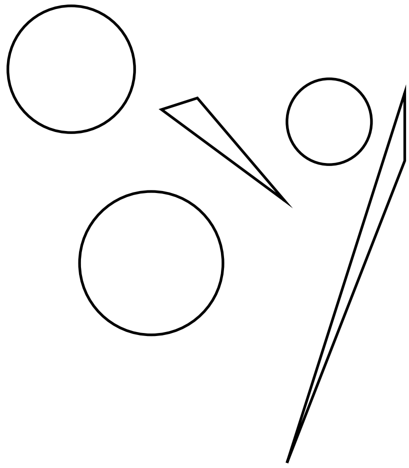
Désormais nous appellerons le triangle “fin” le **triangle minimal** et le triangle “gras” le **triangle maximal**.

Nous n’avons jamais pu prouver cette conjecture mais nous n’avons pas réussi non plus à la mettre en défaut. [NDLR : voir l’article de Jean-Pierre Kahane, page 257.]

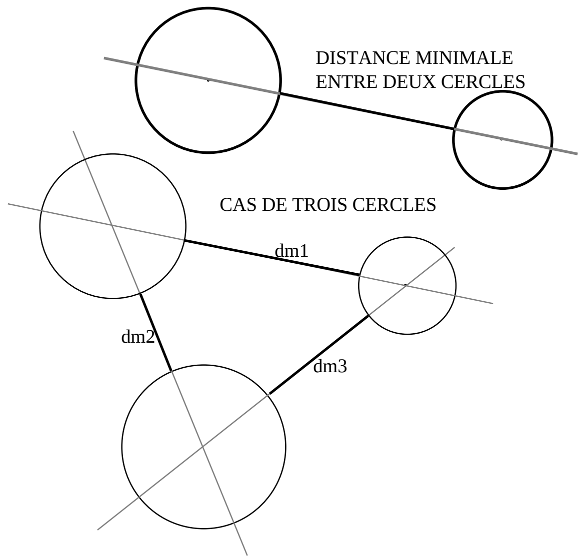
Cependant, à l’aide du logiciel, nous avons trouvé un triangle qui marche et qui possède le même périmètre que le triangle minimal. Par contre, ce triangle semble avoir une aire plus grande que celle du triangle minimal.

On pensait avoir résolu le problème puisqu’il suffisait de choisir des triangles dont le périmètre était compris entre le périmètre du triangle minimal et celui du triangle maximal. Cependant, cette condition est insuffisante : il peut arriver que le triangle ait un côté “trop court” ou “trop long”.

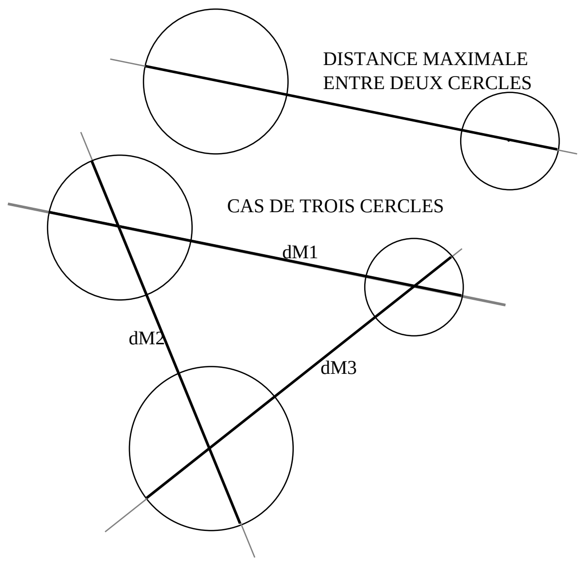
Voici un exemple.



Cela nous a amenés à définir la **distance minimale** et la **distance maximale** :



La distance minimale est la plus petite des distances *dm*1, *dm*2 et *dm*3.



La distance maximale est la plus grande des distances *dM*1, *dM*2 et *dM*3.

Nous pouvons alors compléter nos conditions :

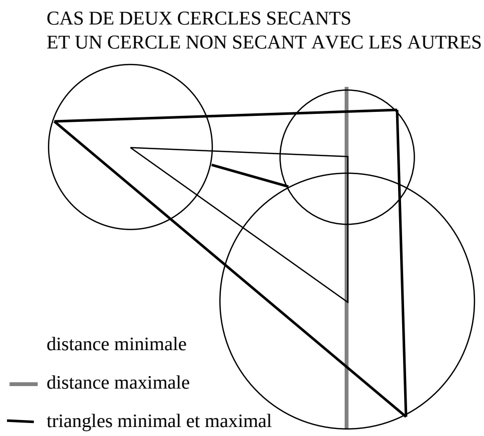
Pour qu'un triangle convienne, il faut que :

- **son périmètre soit compris entre le périmètre du triangle minimal et celui du triangle maximal.**

- **la longueur des trois côtés soit comprise entre la distance minimale et la distance maximale.**

Nos camarades de l'autre établissement [Collège André Doucet de Nanterre, 92] ont étudié des cas particuliers ce qui nous a permis de contrôler la validité de ces conditions dans des cas particuliers.

Mais que deviennent ces conditions dans le cas où deux des cercles sont sécants ?



Les notions de triangle maximal et de distance maximale demeurent inchangées. Par contre, le triangle minimal devient un triangle plat. Pour cela, on prend le point d'intersection des deux cercles sécants le plus proche du troisième cercle et on relie le point d'intersection au point le plus proche du troisième cercle.

Pour obtenir le point le proche, il suffit de tracer la droite qui relie le centre du cercle non sécant au point d'intersection. A l'intersection de la droite avec le cercle, on a le point le plus proche cherché. Dans ce cas, la distance minimale est nulle.

Nous n'avons pas eu le temps de vérifier ce que deviennent ces conjectures dans le cas où les trois cercles sont sécants.

Nous avons réussi, toujours par tâtonnement à trouver plusieurs positions pour un même triangle. On a l'intuition que l'on passe de l'une à l'autre par des rotations et des symétries axiales mais nous n'avons pas eu le temps non plus d'étudier ces transformations avec précision.

Nous sommes tout à fait conscients de n'avoir pas résolu le problème posé de manière définitive.

Il faudrait faire varier tous les paramètres de la situation un par un et contrôler nos conjectures dans chaque cas (position des cercles, rayons des cercles, forme du triangle, longueurs des côtés …).

Pour nous consoler, notre chercheur, Mme Zizi, nous a informés que ce problème est en fait une question très difficile issue de recherche sur la robotique et qu'à sa connaissance, c'était toujours une question ouverte. Alors …

avis aux amateurs !

[NDLR : la conjecture sur la construction du triangle minimal est-elle juste ou fausse ? les résultats annoncés par "Le Géomètre" ci-dessous sont-ils justes ou faux ? voir le point de vue de Jean-Pierre Kahane, page 257.]