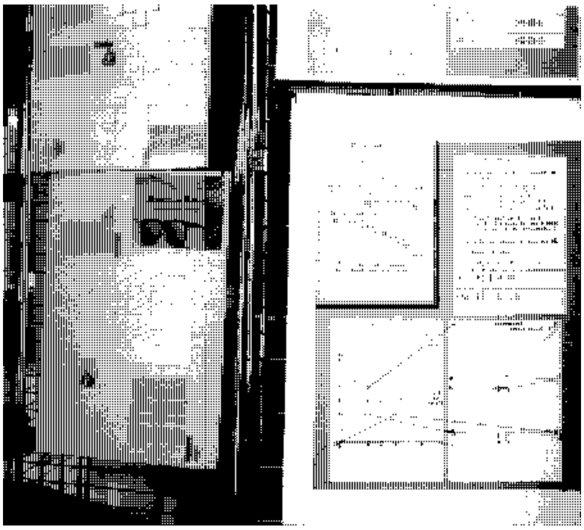
marche au hasard

par …

élèves du Lycée Jean de la Fontaine de Paris (16°) et du Lycée Jacques Prévert de Boulogne-Billancourt (92).

enseignantes : Ghislaine Gaudemet, Christiane Perdon

chercheur : Gilles Godefroy, CNRS



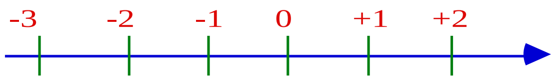
sujet proposé par Monsieur Godefroy :

Sur une droite d un point M se déplace aléatoirement d’une unité vers la droite ou vers la gauche. Soit O le point origine. Etudier la distance moyenne de M à O après n déplacements.
Comment cette distance varie-t-elle avec n ?

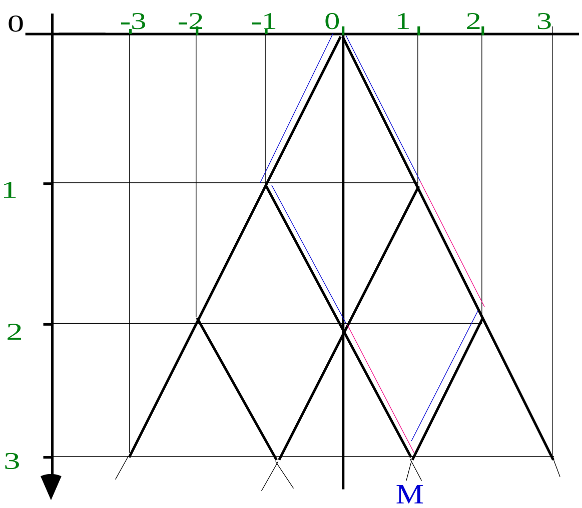
Représentation graphique :

Avant d’étudier véritablement le sujet, essayons de le représenter. Au cours de nos “recherches” nous avons retenu deux représentations graphiques pour visualiser le problème.

La première, la plus simple, est la seule représentation de la droite d et du point M :



Mais cette représentation ne s’est pas avérée très satisfaisante puisqu’elle ne permet pas de suivre exactement le point M au cours de son trajet effectif. Nous allons donc introduire le paramètre temps ; tout en conservant la droite d comme axe des abscisses le temps sera représenté par les ordonnées [ainsi le point M se déplace à chaque unité de temps d’une unité vers la droite ou la gauche (abscisse) et obligatoirement d’une unité vers le bas (ordonnée, le temps étant irréversible)] :



Il est représenté sur ce schéma deux chemins possibles pour aboutir à M.

mise en place de la formule

Le problème posé étant essentiellement basé sur des dénombrements, il convient tout d'abord d'étudier "l'univers des possibilités" ou, plus simplement, le nombre total de différents chemins existant à un temps donné.

Par une démonstration par récurrence on démontre qu'il y a 2^n différents chemins à T = n : soit un point L à un temps t donné, soient G et H les point issus de L à T = t + 1. Expérimentalement nous avons déterminé qu'à T = 1 $N_1 = 2$, à T = 2 = 2^1 $N_2 = 4 = 2^2$, à T = 3 $N_3 = 8 = 2^3$, N_n représentant le nombre total de chemins pour n déplacements (puis les arbres devenant très complexes, nous nous sommes arrêtés là !!).

Supposons qu'il y a 2^t différents chemins à T = t , on a alors :

$$p(L) = \frac{U_t}{2^t}$$

où U_t représente le nombre de chemin aboutissant à L, ainsi :

$$p(G) = p(H) = \frac{p(L)}{2}$$

soit:

$$p(G) = p(H) = \frac{U_t}{2^t * 2}$$

$$p(G) = p(H) = \frac{U_t}{2^{t+1}}$$

Or il est logique qu'il y ait autant de chemins pour aboutir à H ou G depuis L que de chemins aboutissant à L ; ainsi il y a 2^{t+1} chemins totaux à T = t + 1. Ainsi la supposition, vérifiée pour des petits rangs, ayant été supposée vraie pour un entier t donné fixé t ∈ N*, reste vraie pour l'entier suivant t + 1, ***elle est donc vraie pour tout entier positif***.

Si nous considérons maintenant un trajet précis aboutissant à une abscisse précise, on constate que tout chemin est constitué de deux éléments le déterminant entièrement. En revenant au graphe de l'arbre (page précédente), on constate que les deux trajets schématisés sont formés de :

• 2x déplacements qui s'annulent entre eux et ramènent le point sur la ligne médiane

• puis k autant de déplacements que l'abscisse du point considéré (abscisses positives : vers la droite ; abscisses négatives : vers la gauche).

Exemple:

On considère le point d'abscisse 1 à T = 3.

Le point M devra de toutes les manières avoir effectué 1 déplacement vers la droite et 1 déplacement vers la gauche (en bleu sur le graphe), les deux s'annulant entre eux puis un déplacement vers la droite correspondant à son abscisse (en rose sur le graphe).
[NDLC : désolés pour la couleur (bleu et rose) … on essaiera de faire mieux la prochaine fois !]

C'est pourquoi il paraît naturel de penser un trajet en terme de n-uplet constitué des n déplacements. Or si l'on considère un point d'arrivée précis, l'abscisse k est forcément connue pour déterminer le n-uplet il ne suffit alors plus que de déterminer x. On sait d'autre part que :

$$2x + k = n$$

soit : $x = \dfrac{n-k}{2}$

Ainsi tous les trajets aboutissant à une abscisse précise ne sont que les combinaisons de ces x éléments parmi les n.

La distance moyenne de O à M au bout de n déplacements s'exprime donc :

$$d_{moy} = 2\,\frac{\sum_{o}^{n} C_n^x}{2^n}$$

$$d_{moy} = \frac{\sum_{o}^{n} C_n^x}{2^{n-1}}$$

En développant l'expression on aboutit à une expression plus simple, laquelle grâce à la formule de Stirling peut être encore simplifiée ; on obtient alors :

$$d_{moy} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Pour simplifier la formule de combinaisons nous nous sommes servis du fait que :

$$\sum_{p=1}^{n} C_n^p = 2^n$$

$$n! \approx (2\pi)^{1/2}\, n^{n+1/2} e^{-n}$$

où:

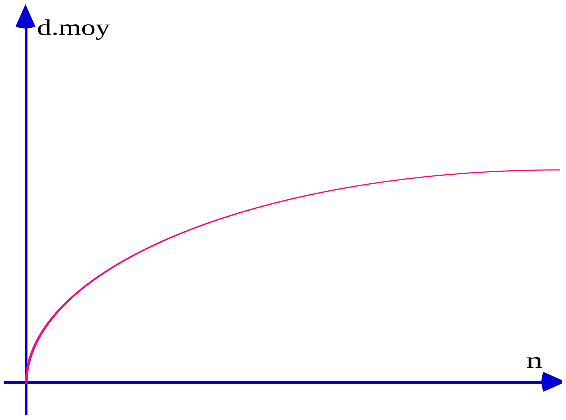
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(2\pi)^{1/2}\, n^{n+1/2} e^{-n}} = 1$$

Etude de la variation de la distance moyenne :

Cette distance s'exprime par une fonction simple ; ainsi il est facile d'établir que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = +\infty$$

Donc plus on effectue de mouvements plus en moyenne M s'écarte de l'origine.



Allure de la courbe représentative de la distance moyenne