les pixels

Combien y a-t-il de points à coordonnées entières sur un cercle ?

par Delphine Boï, Betty Callet, Aurélia Simon-Peyrat, module recherche de 2nde du lycée Racine de Paris

enseignante : Anne Reinmann

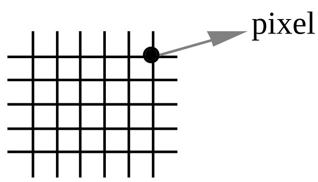
chercheur : Pierre Duchet, CNRS

sujet initial

La planche à pixels. Comment faire tourner une image sur un écran d'ordinateur. Quels sont les angles, les longueurs déterminés par des pixels ?
[NDLR : c'est-à-dire, quelles sont toutes les longueurs possibles, quels sont tous les angles possibles ?]

définition d'un pixel

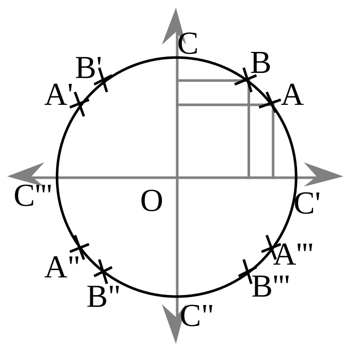
Un pixel est un point du plan qui a des coordonnées entières.



Cependant les pixels seront les points appartenant au cercle et à la grille dans les démonstrations suivantes.

travail sur une figure particulière : le cercle

cercle de rayon 5 unités

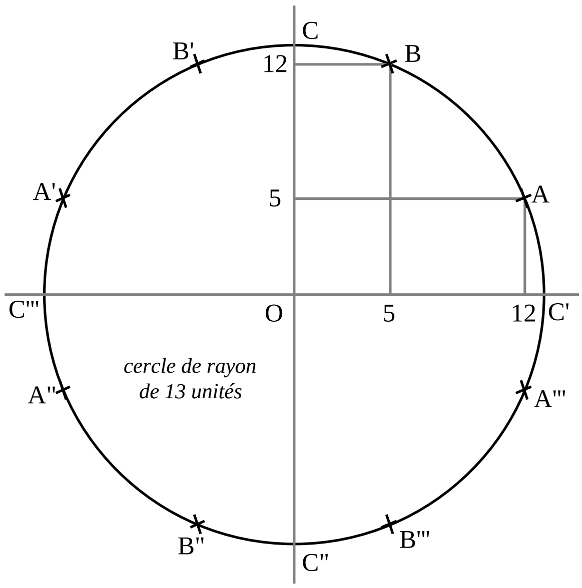


D'après le théorème de Pythagore, deux points appartiennent au cercle et à la grille : A(4, 3) et B(3, 4).

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$$
$$OA = \sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$OA = \sqrt{25} = 5$$
$$OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Or le rayon est de 5 unités, OC, donc 3 points A, B et C se trouvent sur le cercle et sur la grille. Par les symétries centrales et axiales (d'axes Ox et Oy) le nombre de points en définitive est de 12.

cercle de rayon 13 unités

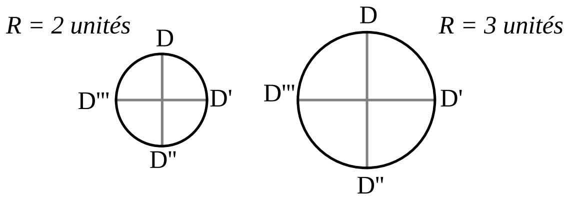


De même, les points A et B appartiennent au cercle et à la grille :

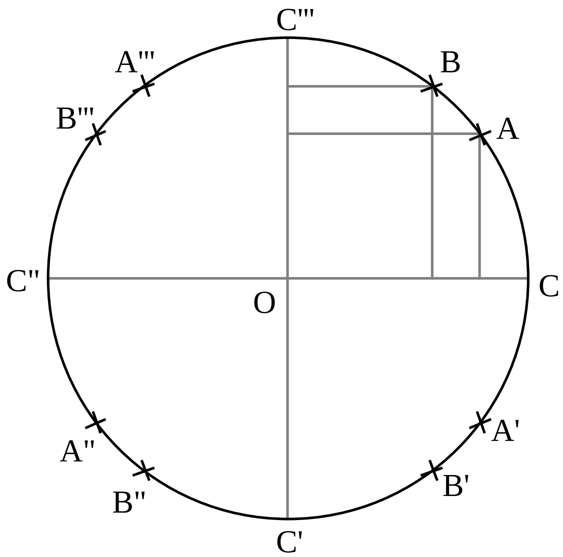
$$OA = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$
$$OB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

ainsi que OC est le rayon du cercle, donc A, B et C appartiennent au cercle et à la grille. Le nombre total de points est 12 avec les symétries.

autres rayons entiers



On étudie les rayons de 2 (et ses multiples) et 3 (et ses multiples) unités. Or, on remarque qu'ils ne contiennent que 4 points, ceux des axes.



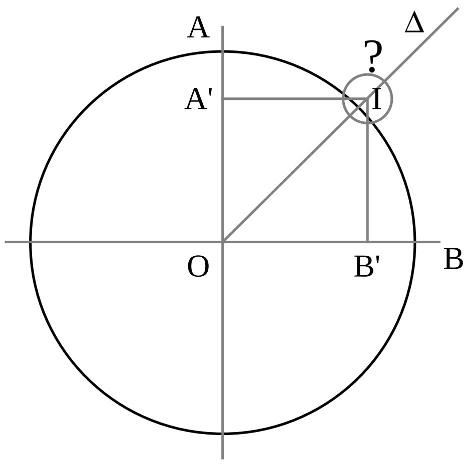
Points et angles trouvés

A(8, 6)	A'(8, -6)	A''(-8, -6)	A'''(-8, 6)
B(6, 8)	B'(6, -8)	B''(-6, -8)	B'''(-6, 8)
C(10, 0)	C'(0, -10)	C''(-10, 0)	C'''(0, 10)

$\widehat{COA} = 36{,}9°$	$\widehat{COB} = 53{,}1°$	$\widehat{COC'''} = 90°$
$\widehat{COB'''} = 126{,}9°$	$\widehat{COA'''} = 143{,}1°$	$\widehat{COC''} = 180°$
$\widehat{COA''} = 216{,}9°$	$\widehat{COB''} = 233{,}1°$	$\widehat{COC'} = 270°$
$\widehat{COB'} = 316{,}9°$	$\widehat{COA'} = 333{,}1°$	$\widehat{COC} = 0°$ ou $360°$

conjecture

Aucun point ne se trouve en même temps sur la bissectrice, le cercle et la grille, pour tout rayon a du cercle ; car il faudrait que l'on ait $a = \sqrt{2} \times b$, a et b étant deux entiers (rayon du cercle et abscisse du point)



Soit I un point à 45° se trouvant sur la bissectrice. A'OB'I est un carré, [OI] est l'une de ses diagonales donc $OI = b\sqrt{2}$.

$OI \neq OA$ donc I ne se trouve pas sur le cercle et sur la grille.

méthode générale

Soient x, y deux nombres entiers positifs compris entre 0 et 13, tels que $x^2 + y^2 = 169$ (pour un cercle de rayon 13 unités). On va prendre successivement une valeur pour x, soit x = 0, x = 1, x = 2 … jusqu'à x = 13.

On effectue la soustraction $169 - x^2$ pour trouver y^2. Si cette valeur est un carré parfait, alors (x, y) sont les coordonnées d'un point du cercle et de la grille. Sinon, ce n'est pas le cas et l'on passe à la valeur suivante de x.

Pour le cercle de rayon 13, nous trouvons 4 points : (0, 13), (5, 12), (12, 5), (13, 0) et par le symétries axiales et centrale, il y a 12 points en tout.

Nous pouvons en déduire la formule

$$x^2 + y^2 = R^2$$

pour trouver le nombre de points appartenant à la grille et au cercle. [NDLR : c'est bien cette formule qui a servi à trouver le nombre de points et non l'inverse.]