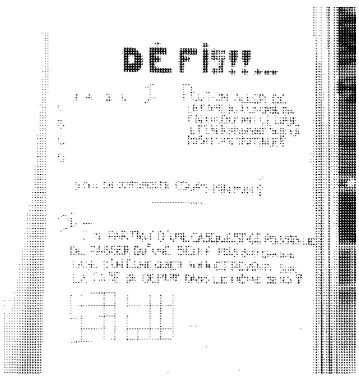
les culbutos News

par Agathe Mandonnet, Cédric, Denis Delangle, Gilles-Manfred Mateille, Jérôme Auger, Marion Clémence, Merkos Yalap, Raphaël David, Sabrina … (tous élèves de 6ème-5ème du collège Pierre de Ronsard et du collège l'Ardillière de Nézant, de Saint Brice sous Forêt)

enseignants : Vincente Bartoli, Yann Bourit, Catherine Mandonnet

chercheur : Pierre Duchet, CNRS

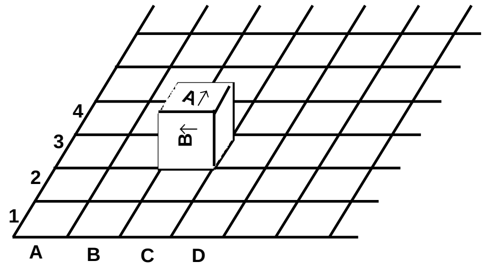


Commentaire du chercheur :

Au vu de la clarté d'exposition, on ne se doute pas du temps qui a été nécessaire au traitement de ce problème : peut-on, par une suite de basculements (= culbutes), faire passer un cube (le "culbuto") dont les faces ont exactement la dimension d'une case d'échiquier, d'une position initiale au coin Sud-Ouest de l'échiquier, à une position finale au coin Sud-Est, tout en retrouvant la face du dessus au dessus, dans la même orientation? Ce n'est que par une succession d'essais, d'explorations, de simplification des représentations que s'est dégagé petit à petit un moyen simple de clarifier la situation, à l'aide d'une disposition particulière de noms de face sur le culbuto, disposition qui présente ce qu'un lecteur averti appellerait un invariant du sous-groupe de transformations qui modélise naturellement les culbutes.
[pour d'autres commentaires du chercheur, voir à la fin de cet article, page 173]

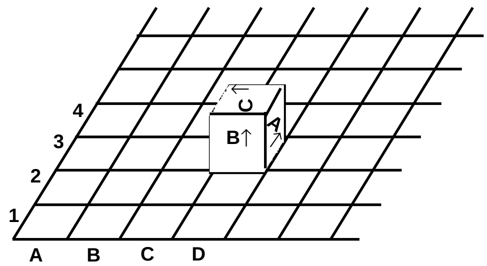
Position du problème

Imaginons un cube qui pivote autour de ses arêtes sur un échiquier, chaque face du cube ayant exactement la taille d'une case, comme ci-dessous :



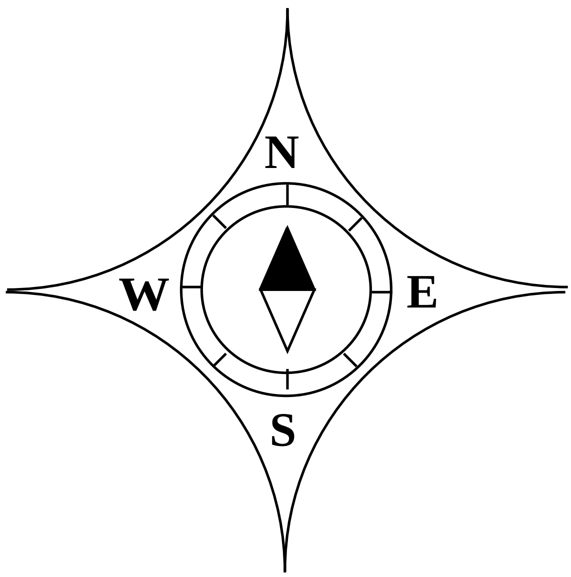
Position initiale : le cube est dans la case C3 face A↑ vers le haut.

Basculons vers l'est :



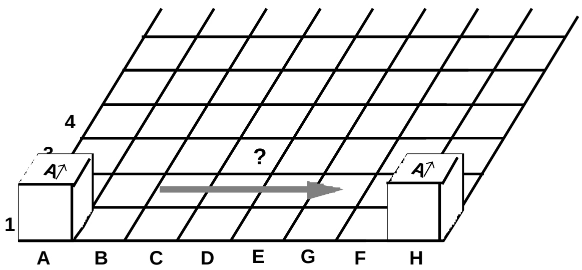
Position suivante : le cube est sur la case D3 face $C_{\leftarrow}$ en haut.

Nous avons convenu de noter les basculements comme sur une carte de géographie :



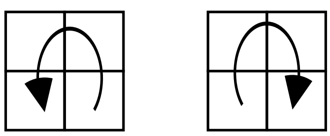
1[ère] remarque : le cube a six faces, chaque face a 4 orientations possibles, ce qui fait 24 positions distinctes du cube et ceci sur chaque face de l’échiquier.

Question : est-il possible de passer de la case A1 à la case H1 d’un échiquier, par une série de basculements et ceci en partant avec la face A↑ vers le haut, et en arrivant avec la face A↑ vers le haut ?



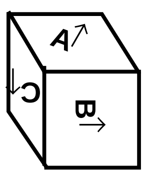
Exploration d’une grille de 2 × 2 cases

Tout d’abord, nous nous sommes intéressés à ce qui se passe sans sortir d’une grille de 2 x 2 cases seulement. Les seuls mouvements possibles sont de tourner autour de cette grille, dans un sens ou dans l’autre.



Théorème : Sur une grille de 2 × 2 cases, seules les 3 faces du cube apparaissent.

Nous avons décidé de nommer ces faces A↑, B↑ et C↑ . Nous avons trouvé une manière d’orienter ces faces de telle façon que si on part de la face A↑ sur la case A1, alors seules les faces A↑, B↑ et C↑ apparaîtront sur cette case A1. Voici cette disposition :



De plus, en orientant ainsi les faces on s’aperçoit que, en partant de la face A sur la case A1 et en tournant dans le sens des aiguilles d’une montre, on obtient :

				au 4[ème] tour
sur la case A1	B↑	C↑	A↑	B↑
sur la case A2	B↑	C↑	A↑	B↑
sur la case B2	C↑	A↑	B↑	C↑
sur la case A2	A↑	B↑	C↑	A↑

D’où la propriété suivante :

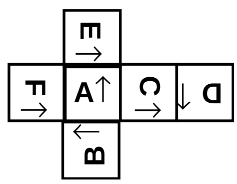
Propriété P : En tournant autour d’une grille de 2 × 2 cases et en disposant les lettres comme indiqué sur la figure, on obtient sur les cases A1 et A2 toutes les lettres “debout” ↑ ou ↓ et sur les cases A2 et B1 on obtient toutes les lettres “couchées” → ou ← .

Retour au problème initial

Revenons à notre échiquier initial. Si on fait basculer le cube plusieurs fois, toutes les faces apparaissent. Nous avons cherché un moyen de nommer les 3 autres faces D↑, E↑ et F↑ de telle façon qu’une propriété qui ressemble à **P** soit conservée. Et nous avons trouvé qu’il fallait mettre :

D↑ opposé à A↓
E↑ opposé à B↓
F↑ opposé à C↓

Si on dessine un développement de ce cube, cela donne :



En plaçant les lettres ainsi, n’importe qui peut vérifier le théorème $\mathbf{T_1}$ suivant :

Théorème T_1 : En partant de n’importe quelle face “debout” (↑ ou ↓) et en culbutant <u>1 fois</u> dans n’importe quelle direction (N, E, W, ou S) on obtient une face “couchée” (→ ou ←).

La réciproque de $\mathbf{T_1}$ est également vraie.

Noir et Blanc

Tout le monde sait que les cases d’un échiquier sont noires ou blanches. 2 cases noires d’une même bande sont séparées par une case blanche et 2 cases blanches d’une même bande sont séparées par une case noire.

Voici nos observations :

— Pour passer d’une case noire à une case blanche, il suffit de faire 1 mouvement dans n’importe quelle direction.

— Pour passer de cette case blanche aux cases noires qui la touchent, il suffit à nouveau d’1 mouvement.

Donc, pour passer d'une case noire à l’une des cases noires les plus proches, le déplacement est de 2 mouvements.

Tous les 2 mouvements, le cycle des couleurs recommence.

Nous obtenons donc le théorème $\mathbf{T_2}$:

Théorème T_2 :

Pour aller d’une case noire à une autre case noire, il faut culbuter un nombre pair de fois.

Pour aller d’une case noire à une case blanche, il faut culbuter un nombre impair de fois.

Conclusion

Par un raisonnement similaire, à partir du théorème $\mathbf{T_1}$, on en déduit le théorème $\mathbf{T'_1}$:

Théorème T'_1 :

Si on part d’une position “debout”, en culbutant un nombre pair de fois, on arrive à une position “debout”.

Si on part d’une position “debout”, en culbutant un nombre impair de fois, on arrive à une position “couchée”.

Revenons à notre question initiale :

Peut-on partir de la case A1 en position A↑ et arriver à la case H1 en position A↑ ?

Or, la case A_1 d’un échiquier en position normale est noire, alors que la case H_1 est blanche, donc d’après le théorème $\mathbf{T_2}$, il faudra basculer un nombre impair de fois. Et, d’après le théorème $\mathbf{T'_1}$, en partant de la position A↑ (“debout”), et en culbutant un nombre impair de fo~~is,~~ on arrivera à une position “couchée > ou < , mais jamais A↑.
→

Nous pouvons donc conclure :

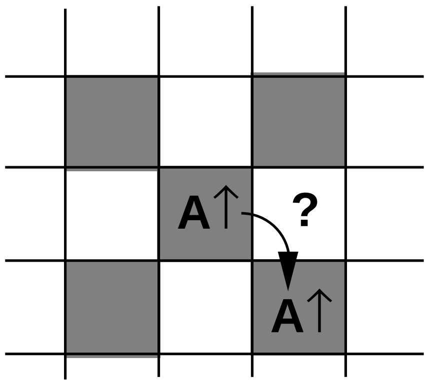
Théorème : Il est impossible de partir de la case A_1 position A↑ et d’arriver sur la case H_1 position A↑.

[NDLC : voir annexe page suivante]

Annexe

Au cours de nos recherches, nous avons répondu à une question posée par des élèves de Math en Jeans année 91-92 :

“En combien de coups au minimum peut-on aller d’une case noire à 1 case noire en diagonale, et en arrivant dans la même orientation qu’à l’origine ?”



Nous avons trouvé une solution en 6 coups : mot de base “**ESWSEN**” et nous en avons déduit les solutions pour aller :

— dans la case en haut à gauche : **SWNENW** (le mot de base à l’envers, N remplace S et W remplace E)

— dans la case en haut à droite : **SENWNE** (le mot de base à l’envers, N remplace S)

— dans la case en bas à gauche : **WSESWN** (il suffit d’échanger E et W dans le mot de base).

Commentaire du chercheur :

Le même problème avait été proposé en 1990-91 à des élèves de 4ème et 3ème, et n’avait pas abouti à une production marquant une avancée significative dans la compréhension du sujet de recherche. L’essentiel de l’activité des élèves avait en effet consisté à décrire de la manière la plus exacte possible le mouvement spatial correspondant à un basculement, ainsi que l’effet de ce mouvement sur les faces du cube. Les outils scolaires à leur disposition s’étaient avérés remarquablement techniques et inefficaces pour l’avancement dans la modélisation du problème (exemple de description : “un basculement du cube ABCDEFGH autour de l’arête EF est la rotation d’angle 90° dont l’axe est la droite (EF) et qui transforme le point G en le point B, le point H en le point A […]).

Ainsi ne s’était jamais mise en œuvre une démarche d’abstraction qui aboutirait notamment à considérer séparément :

1) les positions du culbuto (une position est déterminée par l’identité de la face du dessus et par l’orientation de cette face) et les emplacements du culbuto (= les cases occupées sur l’échiquier).

2) les mouvements de bascule et leur effets (sur les positions, les orientations et les emplacements).

On pourrait penser *a priori* que cette qualité d’abstraction est inaccessible à des enfants de 11-13 ans. On s’apercevra qu’il n’en est rien, à condition de fournir à la réflexion des outils langagiers efficaces. Pour l’énonciation du sujet (après “négociation” avec les enseignants), nous avons explicitement donné un codage pour les mouvements :

« une culbute sera notée par l’une des *lettres* N, E, W (et non O pour éviter la confusion avec 0), S. Ces lettres indiquent, comme sur une carte de Géographie les points cardinaux […] et forment le mot anglais NEWS qui signifie “nouvelles”[…].

Une succession de mouvement sera simplement codée par la succession des lettres correspondantes, c'est à dire par un *mot* […] ».

Une dizaine d'heures de recherche ont été utilisés par les enfants pour comprendre comment on pouvait décrire d'une manière finie l'infinité des situations possibles, qui se présente naturellement sur un échiquier plan illimité, mais qui se présente aussi sur un échiquier fini du fait que le nombre de mouvement est illimité.

Une exploration systématique de l'effet des suites de culbutes, sous forme de tableau à double entrée, a été menée ; la composition des mouvements y était modélisée en faisant d'abord le mouvement indiqué par la rangée, puis celui indiqué par la colonne. Le contenu d'un case donnait un des mouvements les plus simples qui est équivalent à la composition des mouvements, dans le sens qu'il a exactement le même effet sur les positions des faces, indépendamment de l'emplacement sur l'échiquier. Ainsi WN est équivalent à SW suivi de NW, c'est à dire au mouvement SWNW**.** Ce n'est qu'après cette réflexion que le passage à l'échiquier 4×4 puis la considération de l'échiquier 2×2 , suggéré très tôt par l'équipe pédagogique, furent considérés par les jeunes comme des simplifications possiblement intéressantes du problème.

Ces travaux préparatoires ont abouti à une solution correcte du problème initial (avec une démonstration complète et très longue), ainsi qu'au résultat très important suivant (non publié ici car le temps manqua aux élèves pour le discuter et le mettre au point) : **tout mouvement sur le plan infini est équivalent à un mouvement sur l'échiquier 4×4.** C'est finalement le travail sur l'échiquier 2×2 qui a fourni la disposition particulière des noms des faces aboutissant, au moment même du congrès, à la solution simple exposée ici.