le problème de Syracuse

par … du lycée La Fontaine de Paris (jumelage entre le lycée La Fontaine de Paris et le lycée Jacques Prévert de Boulogne)

enseignantes : Ghislaine Gaudemet et Christiane Perdon

chercheur : Gilles Godefroy, CNRS

[NDLR : il s'agira ici du … problème de Syracuse, à savoir :

— choisissez un nombre entier ;
— s'il est pair, divisez-le par 2 ; mais s'il est impair, multipliez-le par 3 et ajoutez 1 au résultat ;
— recommencez avec le résultat que vous avez obtenu ; puis recommencez avec le nouveau résultat ; et recommencez encore ; et encore ; et encore, etc …

exemple — qui manque cruellement dans ce qui suit — en partant du nombre 17 :
17, impair ; 51 + 1 = 52, pair ; 26, pair ; 13, impair, 39 + 1 = 40, pair ; 20, pair ; 10, pair ; 5, impair ; 15 + 1 = 16, pair ; 8, pair ; 4, pair ; 2, pair ; 1, impair ; 3 + 1 = 4, pair et déjà vu, et donc le procédé boucle à l'infini ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; etc …

Avant de lire la suite, essayez vous-même avec un autre nombre que 17 au départ.]

unification de la formule

On a : $u_{n+1} = 3\,u_n + 1$ si u_n est impair
$u_{n+1} = (u_n)\,/\,2$ si u_n est pair

Comme, pour $n \in N$, $(-1)^n = 1$ si n pair
$(-1)^n = -1$ si n impair,

$u_{n+1} = [a + b\,(-1)^{u_n}]\,u_n + c + d\,(-1)^{u_n}$

[on cherche a, b, c, d réels pour que cette formule unique puisse remplacer la formule double de départ]

si u_n est pair :

$$u_{n+1} = (a + b)\,u_n + c + d = (u_n)\,/\,2$$

soit : $a + b = 1/2$
$c + d = 0$

si u_n est impair :

$$u_{n+1} = (a - b)\,u_n + c - d = 3\,u_n + 1 :$$

soit : $a - b = 3$
$c - d = 1$

[NDLR : pour que la relation cherchée remplace bien la formule de départ, *il suffit* évidemment que les coefficients a, b, c, d satisfassent les quatre conditions $a + b = 1/2$, $c + d = 0$, $a - b = 3$, $c - d = 1$.]

Par substitution, on trouve :

$a = 7/4$

$b = -\,5/4$

$c = 1/2$

$d = -\,1/2$

d'où la formule :

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{7 - 5\,(-1)^{u_n}}{4}\,u_n + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{u_n}}{2}}$$

étude de la fonction

Considérons la fonction :

$\underline{f} : N \to N$

$$x \to \frac{7 - 5\,(-1)^x}{4}\,x + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^x}{2}$$

$\to$ ensemble de points car $(-1)^x$ est défini seulement dans N. Toutefois on peut utiliser la fonction :

$f : R \to C$

$$x \to \frac{7 - 5\,(-1)^x}{4}\,x + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^x}{2}$$

[NDLR : à propos de C, on pourra consulter utilement l'article *la géométrie par les formules*, particulièrement pages 54 & 55.]

Essayons d'écrire sous une autre forme cette fonction. On remarque que $-1 = e^{i\pi}$, soit :

$$f(x) = \frac{7 - 5\,e^{i\pi x}}{4}\,x + \frac{1}{2} - \frac{e^{i\pi x}}{2}$$

On a $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, et d'après la formule de Moivre :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, donc :

$$f(x) = \frac{7 - 5\,(\cos\pi x + i\sin\pi x)}{4}\,x + \frac{1}{2} - \frac{\cos\pi x}{2} - \frac{i\sin\pi x}{2}$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, on trouve :

$$x(t) = \frac{7}{4}\,t + \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\,t + \frac{1}{2}\right)\cos\pi t$$

$$y(t) = -\left(\frac{5}{2}\,t + \frac{1}{2}\right)\sin\pi t$$

Ceci permet de tracer une représentation graphique, dans le plan complexe, de la fonction f.

[NDLR : nous laissons le soin au lecteur de tracer les représentations graphiques qui s'imposent ici : la courbe paramétrée : $t \to f(t)$, et les courbes $t \to x(t)$, $t \to y(t)$.]

application au problème de Syracuse

Pour Syracuse, nous resterons dans le cadre des nombres réels. Nous resterons donc sur la partie réelle de la fonction f. (La représentation graphique ne permet pas une étude simple, car on ne peut pas représenter le paramètre.)

Soit la fonction R :

$$R(x) = \frac{7}{4} x + \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2} x + \frac{1}{2}\right) \cos \pi x$$

C'est une fonction de la variable réelle x, on peut donc la représenter graphiquement par la courbe d'équation $y = R(x)$.

Or le problème de Syracuse est une suite définie par $u_{n+1} = R(u_n)$.

Grâce à la droite d'équation $y = x$, on peut suivre les itérations successives de la fonction. Les images seront les sommets d'une sinusoïde (ses extrema sont atteints quand x est entier : $\cos \pi n = -1$ ou 1 avec $n \in N$).

La courbe est donc contenue entre les droites d'équations

$$y = 3x + 1$$

et $$y = x/2$$

conclusion

Même si nous sommes les meilleurs (tu parles !), nous n'avons réussi qu'à trouver un système continu qui permet d'avoir une fonction continue sur N (plus agréable au regard). Ceci permet de suivre les itérations, mais pas de montrer que pour tout nombre $n \in N^*$, au bout d'un nombre fini d'opérations, …

$$u_n = 1.$$