les chemins dans les graphes

par Maud Bissonet, Jocelyn Blondeau, élèves de 2nde, du Lycée Fragonard de l'Isle-Adam et Aurélie Bazire, Alexis Roudergues, Céline Rosin, élèves de 2nde, Cécile Arnaud, Christophe Egile, Aurélia Peyrenègre, élèves de 1ère, du Lycée Alfred Kastler de Cergy-Pontoise.

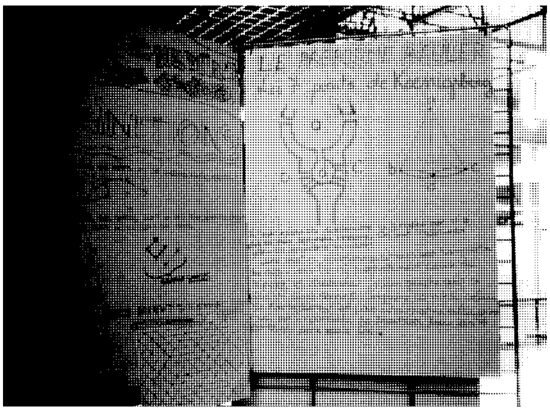
enseignantes : Annick Boisseau, Claude Matz et Annie Soismier

chercheurs : Michèle Vergne et François Digne, de l'Ecole Normale Supérieure

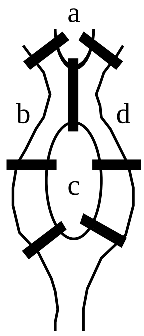
Documentation utilisée :
* Récréations Mathématiques, par Edouard LUCAS (Blanchard).
* Tangente n°21.
* Théorie des graphes et ses applications.

Commentaires des professeurs :
Pour l'ensemble des élèves des deux lycées, les séances hebdomadaires n'ont pas été suivies régulièrement. Ce qui nous a donné l'impression de ne pas progresser.
Par contre, ils étaient toujours tous présents aux séminaires ; ces rencontres ont été très positives (élèves très motivés) et ont permis quand même d'obtenir des résultats.
La mise en forme et la rédaction leur ont demandé beaucoup d'investissement.
Souhaitons qu'ils en tirent profit.

PLAN :



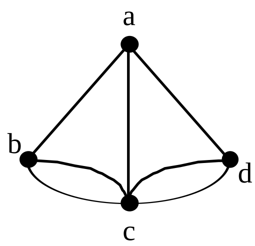
1.— Présentation.



Notre travail a débuté par l'étude des sept ponts de Königsberg. Ce problème nous a permis d'aborder la notion de graphe.
Question : Peut-on passer par les sept ponts une fois et une seule ?

Les sept ponts de Königsberg.

Pour simplifier ce problème, on ramène ce dessin au schéma suivant :

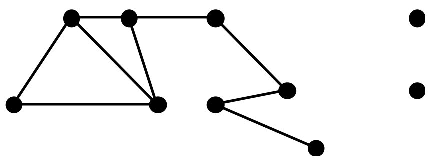


Les régions sont représentées par des sommets, et les sept ponts par des arêtes. Ainsi on obtient un graphe.

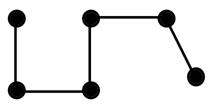
Toutes nos tentatives pour trouver une solution à ce problème ont été vaines. Pour démontrer qu'il n'existe pas de solution, nous avons été amenés à poser les définitions suivantes.

2.— Définitions.

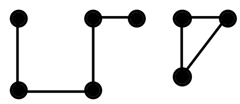
Graphe : ensemble de points et de chemins reliés éventuellement.



Graphe connexe : tous les sommets sont reliés.

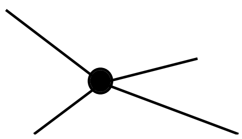


graphe connexe.

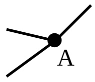


graphe non connexe.

Arborescence : ensemble d'arcs partant d'un sommet.

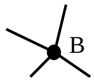


Degré d'un sommet : nombre d'arêtes constituant son arborescence.



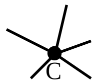
sommet A de degré 3.

Degré pair : un point est de degré pair si le nombre de segments constituant son arborescence est pair.



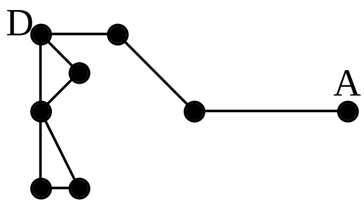
sommet B de degré pair.

Degré impair : un point est de degré impair si le nombre d'arêtes constituant son arborescence est impair.

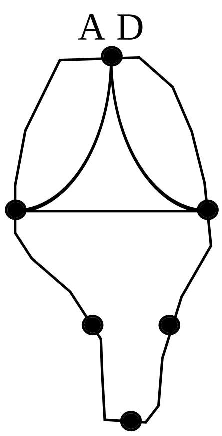


sommet C de degré impair.

Chaîne eulérienne : chemin qui utilise toutes les arêtes une fois et une seule.
Ici, D étant le sommet de départ, A étant le sommet d'arrivée, D est impair, A est impair.



Cycle eulérien : chaîne eulérienne fermée (appelée aussi circuit).



exemple.

A et D sont pairs.

D et A sont confondus car tous les sommets sont de degré pair.

3.— Propriétés.

P1 : Si on a une chaîne eulérienne alors tous les sommets (sauf éventuellement ceux de départ et d'arrivée) sont de degré pair.

Démonstration :
Un chemin (ou chaîne) eulérien signifie par définition qu'on utilise une fois et une seule chaque arête. On doit donc toujours pouvoir arriver et repartir de chaque sommet. Chaque sommet a donc un nombre pair d'arêtes.

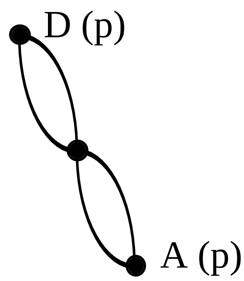
Remarque sur les sommets de départ et d'arrivée : Le sommet de départ nécessite au minimun une arête pour pouvoir partir. Le sommet d'arrivée nécessite au minimum une arête pour permettre de finir le graphe.

Conclusion : les sommets de départ et d'arrivée ne sont pas obligatoirement pairs dans une chaîne eulérienne. Ainsi dans une chaîne eulérienne, nous avons obligatoirement tous les sommets (sauf éventuellement ceux de départ et d'arrivée) de degré pair.

***Application* : dans les sept ponts de Königsberg, tous les sommets sont de degré impair, donc ce n'est pas une chaîne eulérienne.**

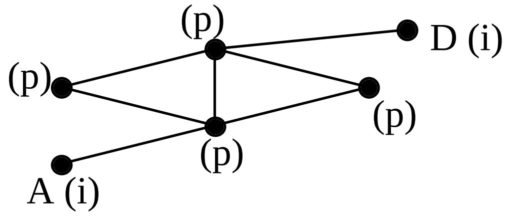
Exemples de chaînes eulériennes particulières :

cycle eulérien :
Sommets de départ et d'arrivée pairs.



notation :
(i) pour impair
(p) pour pair.

chaîne eulérienne :
Sommets d'arrivée et de départ de degrés impairs.



Le cas où il n'y a qu'un sommet impair est cité ultérieurement (2ème cas de P2)

P2 : premier cas

Si on a un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair sauf ceux de départ et d'arrrivée, alors nous avons une chaîne eulérienne.

second cas

Un graphe qui a un seul point impair est impossible (pas de chaîne eulérienne possible).

troisième cas

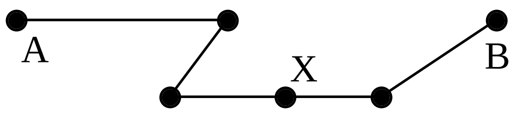
Si le graphe est connexe et que tous les sommets sont de degré pair, alors nous avons une chaîne eulérienne.

P2 - premier cas

Si on a un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair sauf ceux de départ et d'arrrivée, alors nous avons une chaîne eulérienne.

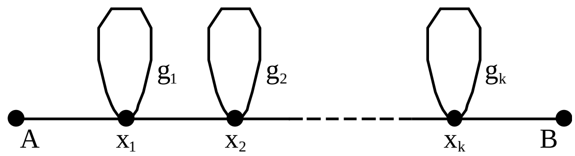
Démonstration : Raisonnement par récurrence sur le nombre d'arêtes.
Un graphe connexe possédant une arête est une chaîne eulérienne. En effet, le seul cas possible est le suivant :

Hypothèse de départ : supposons l'énoncé vrai pour des graphes connexes dont le nombre d'arêtes est strictement inférieur à M.
Démontrons alors que cet énoncé est vrai pour des graphes dont le nombre d'arêtes est égal à M.
Soit un graphe connexe dont le nombre d'arêtes est égal à M. Le sommet A, point de départ, le sommet B, point d'arrivée sont impairs, et tous les autres sommets sont de degré pair.
Prenons l'exemple d'un voyageur partant de A et arrivant à un sommet X différent de B, il aura alors utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à X et pourra repartir. Quand il ne pourra plus repartir, il sera nécessairement en B. Appelons μ cette chaîne.



Pour arriver à X : une seule arête incidente à X, il en reste une pour repartir.

Si les arêtes ne sont pas toutes utilisées, il restera un graphe partiel G' dont tous les sommets sont de degré pair. Soient g_1, g_2, g_3, … les composantes de G' admettant au moins une arête. Ces composantes sont connexes. Comme nous avons déjà utilisé plusieurs arêtes (au moins deux) pour arriver en G', g_1, g_2, g_3, … ont un nombre d'arêtes strictement inférieur à M. D'après l'hypothèse de récurrence, g_1, g_2, g_3, … sont des chaînes eulériennes. Comme G est connexe, la chaîne μ rencontre successivement toutes les composantes en des sommets x_1 pour g_1, x_2 pour g_2, … On note μg_1 la chaîne eulérienne relative à g_1. Considérons alors la chaîne :
$\mu(a, x_1) + \mu g_1 + \mu(x_1, x_2) + \mu g_2 + \ldots + \mu(x_k, b)$



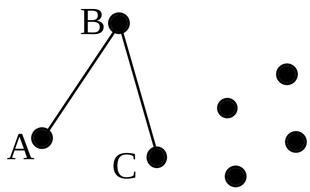
chaîne μ.

On a bien ainsi une chaîne eulérienne.

P_2 - second cas

Un graphe qui a un seul point impair est impossible (pas de chaîne eulérienne possible).

Démonstration :
Partons d'un graphe avec M arêtes et un seul point de degré impair A .

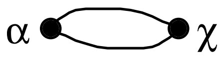


On prend le point A comme point de départ et on décrit une arête [AB] au choix. On barre cette arête car elle n'est plus utilisable. On obtient alors un graphe avec(M-1) arêtes, avec le sommet A de degré pair et le sommet B qui est devenu impair. Les autres sommets du graphe restent tous pairs.
On part maintenant de B et on va en C par l'arête [BC]. On la supprime comme l'arête [AB]. Donc B devient pair et C devient

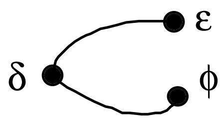
impair. Le graphe a un seul point impair et (M-2) arêtes. Par ce procédé, on arrive à un graphe possédant deux arêtes et un seul point de degré impair, noté ß. Cherchons tous les graphes possédant uniquement deux arêtes. Parmi tous ces graphes, cherchons tous ceux qui possédent un seul sommet impair.

Il y a en fait trois cas :

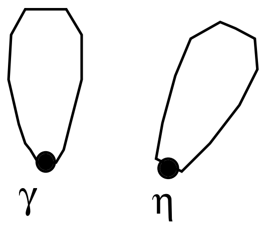
→ Les deux points α et χ sont de degré pair :



→ Il y a deux points de degré impair :



→ Il n'y a pas de point impair :



Il est donc impossible d'avoir un graphe avec un seul point de degré impair et deux arêtes.

P2 - troisième cas

Si le graphe est connexe et que tous les sommets sont de degré pair, alors nous avons une chaîne eulérienne.

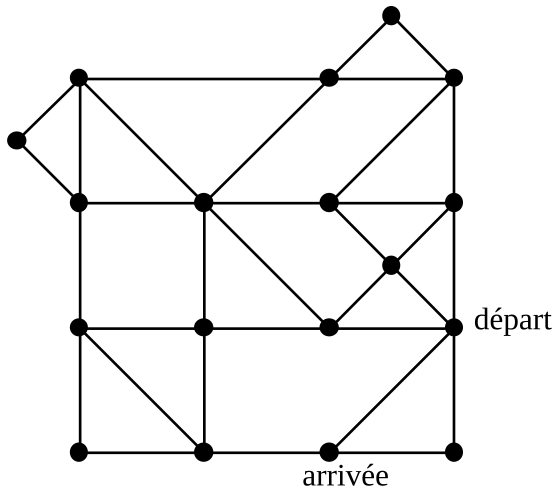
<u>Démonstration</u> :

Si le graphe a tous les sommets de degré pair, on part de n'importe quel point, on élimine une arête et on se retrouve dans le premier cas car on a deux sommets de degré impair, tous les autres étant de degré pair.

4.— Conclusion.

On s'est simplement intéressés aux chaînes eulériennes (vu sous l'angle mathématique). Il existe d'autres chaînes : hamiltoniennes par exemple. On aurait pu aussi mettre notre théorie en pratique : exemple, étude du parcours fait par le facteur dans une ville, des réseaux téléphoniques …

P.S. : Voici un autre exemple de graphe eulérien sur lequel nous avons travaillé.
Trouvez des chemins eulériens.



[NDLR :
Remarque sur P2 : on peut commencer la récurrence avec 0 arête.
Le deuxième cas de la récurrence peut être grandement simplifié si on le démontre par récurrence.
On pourrait préciser dans l'énoncé du théorème que s'il y a deux sommets impairs ce sont les points de départ et d'arrivée et que sinon on peut partir de n'importe où.
On pourrait aussi dire que si tous les sommets sont pairs alors la chaîne eulérienne est un cycle.]