l'infini

par Thierry Guilard (TC), Monique Li (1°S) et Seng Loc Thap (1°S), élèves au lycée Racine (jumelage entre le lycée Racine de Paris et le lycée Jean Jaurès d'Argenteuil, en 1989-1990*)

enseignants : Pierre Audin, René Veillet

chercheur : Pierre Duchet, CNRS

[* NDLR :
ce texte est une production de l'an 1 de MATh.en.JEANS ; il a été question de le publier dans *Tangente* mais il a été égaré, et il a finalement été retrouvé — du moins une photocopie. Les participants du colloque “Vivre les mathématiques autrement” de l'IUFM de Reims, 27 mai 1993, ont pu disposer d'un premier tirage de ce texte. Il nous semble naturel que les *pionniers* de MATh.en.JEANS soient tout de même publiés eux aussi, même s'ils n'ont pas participé au congrès de Polytechnique.]

sujet proposé :
L'infini. L'infiniment grand et l'infiniment petit. Histoire et histoires. La continuité ou les continuités. Le continu, le transfini.

De temps en temps, dans un cours de math, il arrive qu'un élève curieux pose la question interdite : « Mais, c'est quoi l'Infini ? ».

Alors le professeur, ravi, lui répond : « C'est Dieu ! ». Rien de tel pour alimenter cette curiosité naissante et l'élève, aussitôt, part à la découverte d'un domaine encore peu approfondi. Il rencontre bientôt un vieux sage qui lui pose la question suivante :

« Un hôtel au nombre de chambres fini affiche complet ; un voyageur arrive et souhaiterait en obtenir une, mais l'hôtelier ne peut que le renvoyer gentiment. Ce voyageur continue sa route et arrive devant un autre hôtel qui affiche lui aussi complet. Toutefois cet établissement comprend un nombre infini de chambres. Peut-il convaincre l'hôtelier de lui donner une chambre ? ».

L'élève réfléchit et conclut.

détruisons les préjugés

A vue de nez, les ensembles de nombres sont différents. Ils ne contiendraient donc pas le même nombre d'éléments. Or il s'avère que certains ensembles ont le même nombre d'éléments. Etudions par exemple l'ensemble des entiers naturels N et l'ensemble des entiers relatifs Z. On pourrait croire que l'ensemble des entiers relatifs, contenant, en plus des nombres positifs, des nombres négatifs, serait plus grand que l'ensemble des entiers naturels … Ô ! Stupeur ! … Ils contiennent le même nombre d'éléments !

En effet, considérons N et Z ; pour démontrer qu'ils sont équivalents, il faut et il suffit que l'on trouve une bijection entre eux, c'est-à-dire que chaque élément de N soit en correspondance avec chaque élément de Z et réciproquement.

Choisissons la fonction f(n), pour tout n appartenant à N.

Pour n pair, f(n) = n/2,
Pour n impair, f(n) = (- n - 1)/2.

Définissons la fonction inverse pour tout q de Z :

Si q ∈ Z^{+*}, $f^{-1}(q) = 2q$ = n pair,
Si q ∈ Z^{-*}, $f^{-1}(q) = -2q-1$ = n impair.
A 0 faisons correspondre 0.

Ainsi, nous avons défini une relation entre Z et N. Par cette relation, chaque n de N a une image par f dans Z et chaque image de f a un seul antécédent dans N. Simplifions les choses : chaque élément de N est relié à un élément de Z et réciproquement.

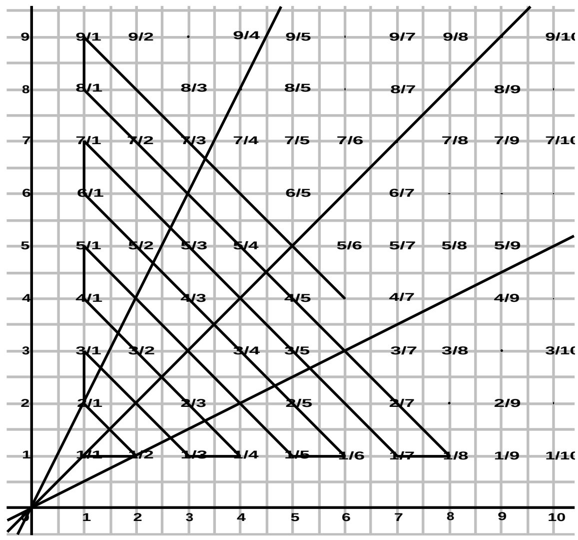
Nous arrivons donc à la surprenante conclusion que N et Z contiennent le même nombre d'éléments et N et Z que l'on croyait différents sont en réalité équivalents.

Mais ne nous arrêtons pas sur notre lancée ! Il existe aussi une correspondance entre Z et Q cependant elle est un peu plus difficile à trouver. En effet, Q a des nombres qui reviennent à cause des fractions réductibles, par exemple 2, 4/2, 8/4, … Aussi, pour faciliter notre tâche, nous avons préféré n'étudier que les fractions irréductibles. La démonstration étant assez longue, nous préférons vous donner le raisonnement en gros.

Considérons Z et Q (entiers rationnels). Soient deux demi-droites [O, x) et [O, y) formant un repère à coordonnées entières.

A chaque point de coordonnées (x, y) correspond une fraction rationnelle de la forme y/x. Les points sur les axes du repère ne sont pas numérotés. On numérote les points du repère en utilisant des entiers naturels dans l'ordre croissant.

A chaque fois que l'on numérote M (x_M, y_M) on supprime les autres points de la demi-droite [O, M). On supprime ainsi toutes les fractions réductibles équivalentes à y_M/x_M.



On commence par numéroter 1/1, puis 1/2. On numérote ensuite les points d'une même diagonale parallèle à la 2ème bissectrice.

➜ Si l'on arrive à un point de la forme y/1, on passe ensuite au point (y+1)/1 et l'on recommence à numéroter les points d'une même diagonale parrallèle à la 2ème bissectrice.

➜ Si l'on arrive à un point de la forme 1/x, on passe ensuite au point 1/(x+1) et l'on recommence à numéroter les points d'une même diagonale parrallèle à la 2ème bissectrice.

➜ Et ainsi de suite.

A chaque élément de Z^{+*} on fait correspondre un élément de Q^{+*} unique. Tout élément de Q^{+*} est numéroté. Donc à chaque élément de Q^{+*} on fait correspondre un élément unique de Z^{+*}. On a alors une bijection entre Q^{+*} et Z^{+*}.

Nous pouvons visualiser cette correspondance grâce au dessin ci-dessus, qui, avouons-le, nous a été soufflé par l'illustre Cantor.

De la même manière, on obtient une bijection entre Q^{-*} et Z^{-*}.

A 0 appartenant à l'ensemble Q, on fait correspondre 0 appartenant à l'ensemble Z.

On a donc établi une bijection entre Q et Z.

A la poursuite de nos découvertes dans cette jungle d'inattendu, quelle ne fut pas notre surprise de découvrir qu'un intervalle ouvert, c'est-à-dire une droite, a le même infini qu'un segment borné.

Ce problème se résume à celui de l'hôtel au nombre de chambres infini. Mais pour mieux comprendre, il n'y a rien de tel qu'un exemple concret, des chiffres enfin !

Considérons]0,1[un intervalle ouvert et [0,1[un intervalle semi-ouvert. Envisageons la suite $u_n = 1/2^n$ avec $n \geq 1$ puis établissons une bijection entre]0,1[et [0,1[en distinguant d'une part les termes de la suite u_n et d'autre part tous les nombres restants :

— au premier terme de (u_n), c'est-à-dire 1/2, faisons correspondre 0, au second terme, c'est-à-dire 1/4, faisons correspondre 1/2 et ainsi de suite reportons chaque élément de l'intervalle [0,1[;

— les nombres restants ont pour images eux-mêmes.

Ainsi, chaque élément est relié à un autre élément.

En tous cas, c'est en raisonnant de cette manière que l'élève a pu fournir une réponse fort simple au sage à propos du Problème de l'hôtel. Et vous, l'avez-vous trouvée ? … Vous donnez votre langue au chat ? …

Réfléchissez encore un peu et pour les partisans du moindre effort voici un indice : l'intervalle]0,1[représente l'hôtel infini, l'intervalle [0,1[représente l'hôtel mais avec le voyageur en plus.

Vous y êtes ?

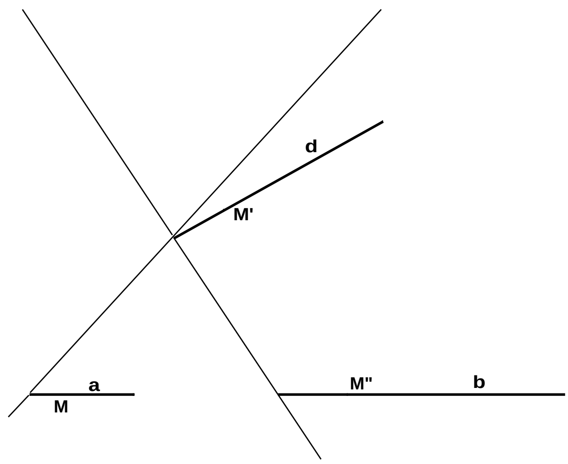
Il suffit de déplacer le locataire de la chambre 0 à la chambre 1/2 puis de déplacer le locataire de la chambre 1/2 dans la chambre 1/4 et ainsi de suite sans oublier de donner la chambre 0 au voyageur fourbu et avide de repos, qui n'attendait que ça.

nombres et points, où s'arrête la différence

Si l'on considère deux segments de même nature et de même longueur, il est facile d'affirmer qu'ils contiennent chacun le même nombre de points d'où la même infinité de points et de conclure qu'ils ont les mêmes infinis.

Approfondissons le problème et prenons deux segments de même nature mais cette fois-ci de longueurs différentes. Nous nous apercevons, après examen et avec étonnement, que là encore ils ont tous les deux le même nombre de points donc le même infini.

Il est possible de démontrer ce résultat par homothétie mais aussi par projection, méthode utilisée ci-dessous :



Traçons deux segments (a et b) de longueurs différentes.

Projetons sur d tous les points de a tels que M' soit le projeté de M suivant la direction Δ.

Puis projetons tous les points de d sur le segment b tel que M" soit le projeté de M' suivant la direction Δ'.

Ainsi tous les points de a ont été projetés sur d et composent d puis de d tous les points ont été projetés sur b et composent b.

Nous obtenons bien le même nombre de points sur a que sur b.

Vous pensez bien qu'après tout ce que nous avions découvert nous ne nous arrêterions pas là, et comme vous vous en êtes sûrement doutés nous avons établi d'autres bijections comme celle entre deux segments de nature différente.

Pour cette démonstration, nous avons besoin de nous référer à la bijection entre]0,1[et [0,1[développée plus haut. En effet, assimilons les segments aux intervalles.

Si nous voulons établir une bijection entre un segment ouvert et un segment fermé, tous deux de longueurs différentes, il suffit de montrer que deux segments bien que de longueurs différentes contiennent la même infinité de points comme cela a été démontré par les projections puis d'utiliser justement cette démonstration sur les intervalles]0,1[et [0,1[en établissant d'abord une bijection entre un segment ouvert et un segment semi-ouvert puis d'établir une seconde bijection entre un segment semi-ouvert et un segment fermé.

Ainsi, par une synthèse de deux démonstrations nous pouvons en tirer une troisième tout aussi étonnante.

Nous vous proposons une démonstration très simpliste de la bijection entre un segment et une droite. Pour cela, utilisons par exemple la courbe représentative de la fonction Arctangente :

Considérons une droite Δ et le segment $]-\pi/2, \pi/2[$. Projetons tous les points de Δ sur la courbe représentative de la fonstion Arctangente puis projetons tous les points de cette courbe sur le segment $]-\pi/2, \pi/2[$ et nous obtenons facilement une bijection entre un segment ouvert et une droite.

Bien entendu, en prolongeant cette méthode et toutes celles vues précédemment l'obtention d'une bijection entre un segment semi-ouvert et une droite ou d'une bijection entre un segment fermé et une droite n'est plus très difficile à trouver.

D'après ce que nous avons vu, il est possible de dire qu'il existe (au moins) deux “types” d'infini :

— d'une part, celui dans lequel il est possible de faire des calculs, celui qui peut être formé par exemple par l'addition d'une infinité de termes et que l'on qualifie de dénombrable ;

— d'autre part, celui qui est une grandeur indénombrable et que nous ne pouvons qu'envisager.

D'où le lien qui rapproche l'infini mathématique de l'infini philosophique dans lequel cette notion d'infini rejoint celle de la religion à savoir l'Absolu, Dieu : *en effet, depuis toujours l'infini …*

Thierry Guilard,
Monique Li,
Seng Loc Thap.

[NDLR : en annexe, page suivante, une démonstration originale de la divergence de la série harmonique, c'est-à-dire la somme des inverses des entiers positifs non nuls :

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\dots$.]

[NDLR : la démonstration classique consiste à grouper les termes à partir de 1/3 par paquets de plus en plus gros : le premier paquet contient deux termes de 1/3 à 1/4, tous deux minorés par 1/4, le deuxième paquet contient quatre termes de 1/5 à 1/8, tous quatre minorés par 1/8, le troisième paquet contient huit termes de 1/9 à 1/16, tous huit minorés par 1/16, le quatrième paquet contient seize termes de 1/17 à 1/32, tous seize minorés par 1/32, et ainsi de suite. Chaque paquet est ainsi minoré par 2/4, 4/8, 8/16, 16/32, etc, c'est-à-dire à chaque fois par 1/2. Lentement mais sûrement, la série harmonique diverge, car elle est minorée par :

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\frac{16}{32}+\dots$ c'est-à-dire

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$$.]

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit S_n la somme des termes de (u_n) : $S_n = (1) + (1/2) + (1/3) + (1/4) + (1/5) + (1/6) + (1/7) + \ldots + (1/n)$. On s'intéresse à la somme de termes de u_n tels que :

$$10^p + 1 \leq n \leq 10^{p+1}, \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n + 1 > n$, et donc $(1/(n+1)) < (1/n)$. Ainsi :

$$\frac{1}{10^p+1} + \frac{1}{10^p+2} + \ldots + \frac{1}{2.10^p} \quad (10^p \text{ termes})$$

$$> \frac{1}{2.10^p} + \frac{1}{2.10^p} + \ldots + \frac{1}{2.10^p} \quad (10^p \text{ termes})$$

$$> 10^p \times \frac{1}{2.10^p} > \frac{1}{2}$$

de même :

$$\frac{1}{3.10^p+1} + \frac{1}{3.10^p+2} + \ldots + \frac{1}{4.10^p} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4.10^p+1} + \frac{1}{4.10^p+2} + \ldots + \frac{1}{5.10^p} > \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{7.10^p+1} + \frac{1}{7.10^p+2} + \ldots + \frac{1}{8.10^p} > \frac{1}{8}$$

donc :

$$\frac{1}{10^p+1} + \frac{1}{10^p+2} + \ldots + \frac{1}{10^{p+1}}$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 1,075 > 1$$

Comme p décrit N, il existe une infinité de sommes de termes de (u_n) telles que

$$10^p+1 \leq n \leq 10^{p+1}.$$

Toutes ces sommes de termes de (u_n) sont strictement supérieures à 1. S_n est donc calculée comme somme de "groupements de termes dont la somme est strictement supérieure à 1".

La suite S_n tend donc vers l'infini.

Thierry Guilard

[NDLR : voici deux exemples numériques des calculs effectués ci-contre :]

(1/2)+(1/3)+(1/4)+(1/5)+(1/6)+(1/7)+(1/8)+(1/9)+(1/10)
>
(1/2)+0+(1/4)+(1/5)+0+0+(1/8)+0+0
=
(1/2)+(1/4)+(1/5)+(1/8)=1,075>1

et

(1/11)+(1/12)+(1/13)+(1/14)+(1/15)
+(1/16)+(1/17)+(1/18)+(1/19)+(1/20)

+(1/21)+(1/22)+(1/23)+(1/24)+(1/25)
+(1/26)+(1/27)+(1/28)+(1/29)+(1/30)

+(1/31)+(1/32)+(1/33)+(1/34)+(1/35)
+(1/36)+(1/37)+(1/38)+(1/39)+(1/40)

+(1/41)+(1/42)+(1/43)+(1/44)+(1/45)
+(1/46)+(1/47)+(1/48)+(1/49)+(1/50)

+(1/51)+(1/52)+(1/53)+(1/54)+(1/55)
+(1/56)+(1/57)+(1/58)+(1/59)+(1/60)

+(1/61)+(1/62)+(1/63)+(1/64)+(1/65)
+(1/66)+(1/67)+(1/68)+(1/69)+(1/70)

+(1/71)+(1/72)+(1/73)+(1/74)+(1/75)
+(1/76)+(1/77)+(1/78)+(1/79)+(1/80)

+(1/81)+(1/82)+(1/83)+(1/84)+(1/85)
+(1/86)+(1/87)+(1/88)+(1/89)+(1/90)

+(1/91)+(1/92)+(1/93)+(1/94)+(1/95)
+(1/96)+(1/97)+(1/98)+(1/99)+(1/100)

>

(1/20)+(1/20)+(1/20)+(1/20)+(1/20)
+(1/20)+(1/20)+(1/20)+(1/20)+(1/20)

+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0

+(1/40)+(1/40)+(1/40)+(1/40)+(1/40)
+(1/40)+(1/40)+(1/40)+(1/40)+(1/40)

+(1/50)+(1/50)+(1/50)+(1/50)+(1/50)
+(1/50)+(1/50)+(1/50)+(1/50)+(1/50)

+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0

+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0

+(1/80)+(1/80)+(1/80)+(1/80)+(1/80)
+(1/80)+(1/80)+(1/80)+(1/80)+(1/80)

+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0

+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0

= (10/20)+(10/40)+(10/50)+(10/80)
= (1/2)+(1/4)+(1/5)+(1/8) = 1,075 > 1