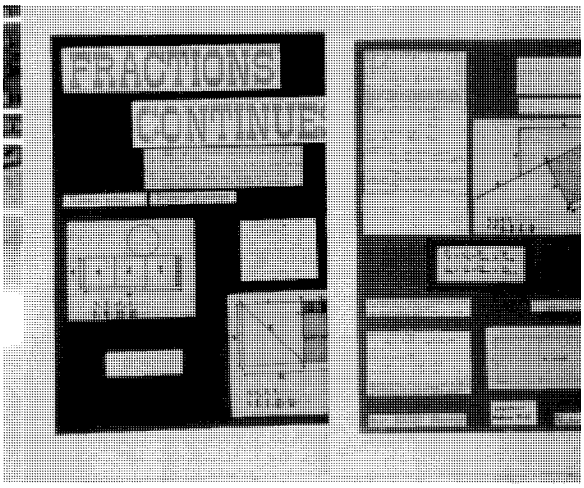
approximation des nombres réels par des fractions continues

par … des collèges André Doucet de Nanterre et Victor Hugo de Noisy-le-Grand

enseignants : Martine Brunstein, Danielle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, Pierre Lévy

chercheur : Jacqueline Zizi



Il s'agit de trouver le plus de décimales exactes possibles pour les nombres non décimaux en utilisant des approximations par des fractions. Nous avons trouvé deux méthodes une dont la base est algébrique et une dont le point de départ est géométrique.

La première méthode que nous allons vous présenter est basée sur le principe suivant : on décompose le nombre en la somme de sa partie entière et de sa partie décimale que l'on va essayer d'écrire sous la forme de l'expression suivante :

$$\underbrace{a}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{\cfrac{1}{* + \cfrac{1}{* + \cfrac{1}{* + \cfrac{1}{* + \dots}}}}}_{\text{Partie décimale}}$$

* représente un nombre entier positif [NDLR: * n'est pas forcément toujours le même nombre ; exemple :]

Prenons un exemple :

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \dots}}}}$$

Commençons par calculer $3 + \frac{1}{7}$, c'est-à-dire que l'on va négliger le reste de l'expression.

$3 + \frac{1}{7}$ s'appelle la première "réduite" :

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}142857$$

Calculons maintenant la deuxième réduite :

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} \approx 3{,}141509$$

La troisième :

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} \approx 3{,}1415929$$

Calculons la réduite suivante :

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}} = \frac{103993}{33102} \approx 3{,}1415927$$

Nous reconnaissons là les six premières décimales de π. Cette expression semble nous donner les décimales exactes de π et cela avec une très grande rapidité. Pour vous expliquer comment on obtient des expressions de ce genre, nous allons calculer de cette manière les premières décimales exactes de $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ est le nombre positif qui, élevé au carré donne 2.

$\sqrt{2}$ n'est pas un entier, c'est un nombre compris entre 1 et 2 mais il n'est pas décimal. En effet, si $\sqrt{2}$ était un nombre décimal alors son dernier chiffre serait 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 et donc son carré se terminerait par 1, 4, 9, 6 ou 5 ; cela est impossible car le carré de $\sqrt{2}$ est 2. $\sqrt{2}$ peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1}$$

où x_1 est un entier plus grand que 1.

1ère étape : calcul de x_1

$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1}$ c'est-à-dire $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

Si $x_1 = 3$ alors $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

et $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \approx 1{,}7\ldots$ alors que $\sqrt{2}^2 = 2$.

Si $x_1 = 2$ alors $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

et $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \approx 2{,}25$ alors que $\sqrt{2}^2 = 2$.

conclusion :

$1{,}7 < \sqrt{2}^2 < 2{,}25$

$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

$2 < x_1 < 3$ et donc $x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$

et donc $\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}}}$

2ième étape : calcul de x_2

On procède exactement de la même manière que pour le calcul de x_1.

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}}$ c'est-à-dire $x_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - 2\sqrt{2}}$

Si $x_2 = 3$ alors $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$

c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{10}{7}$.

Or $\left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{100}{49} \approx 2{,}04$ alors que $\sqrt{2}^2 = 2$.

Si $x_2 = 2$ alors $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$

c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$.

Or $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} \approx 1{,}96$ alors que $\sqrt{2}^2 = 2$.

conclusion :

$1{,}96 < \sqrt{2}^2 < 2{,}04$

c'est-à-dire $\left(\frac{7}{5}\right)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < \left(\frac{10}{7}\right)^2$

c'est-à-dire $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{10}{7}$

On a $2 < x_2 < 3$ et donc $x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}$

et donc $\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3}}}}$

3ième étape : calcul de x_3

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3}}}$ c'est-à-dire $x_3 = \frac{-2\sqrt{2} + 3}{5\sqrt{2} - 7}$

Si $x_3 = 2$ alors $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$

Or $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{14} \approx 2{,}006$.

Si $x_3 = 3$ alors $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{24}{17}$

Or $\left(\frac{24}{17}\right)^2 = \frac{576}{289} \approx 1{,}99\ldots$.

conclusion :

$1,99 < \sqrt{2}^2 < 2,006$

c'est-à-dire $\left(\frac{24}{17}\right)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < \left(\frac{17}{12}\right)^2$

c'est-à-dire $\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$

On a $2 < x_3 < 3$ et donc $x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$

et donc $\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_4}}}}}$

4**[ième] **étape : calcul de x_4

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_4}}}}$$

c'est-à-dire $x_4 = \frac{2\sqrt{2} - 3}{7 - 5\sqrt{2}}$

Si $x_4 = 2$ alors $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}$

Or $\left(\frac{41}{29}\right)^2 = \frac{1681}{841} \approx 1,9988.$

Si $x_4 = 3$ alors $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}} = \frac{58}{41}$

Or $\left(\frac{58}{41}\right)^2 = \frac{3364}{1681} \approx 2,001\ldots$.

conclusion :

$1,998 < \sqrt{2}^2 < 2,001$

c'est-à-dire $\left(\frac{58}{41}\right)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < \left(\frac{41}{29}\right)^2$

donc $\frac{58}{41} < \sqrt{2} < \frac{41}{29}$ c'est-à-dire $2 < x_3 < 3$.

On a alors $x_4 = 2 + \frac{1}{x_5}$

et donc $\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_5}}}}}}$

Nos calculs font apparaître une suite constante de 2 dans la fraction continue. Nous conjecturons que cela est toujours vrai et qu'il est inutile de poursuivre les calculs. Nous le prouverons par une autre méthode un peu plus loin.

Pour obtenir des décimales exactes de $\sqrt{2}$, il suffit de calculer des valeurs approchées de chaque “réduite”. On obtient, à la quatrième réduite, deux décimales exactes de $\sqrt{2}$.

***Calcul des quatre premières réduites de** $\sqrt{2}$*

1[ière] réduite : $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}$

c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{3}{2}$

donc $\sqrt{2} \approx 1,5$.

2[ième] réduite : $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$

c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$

donc $\sqrt{2} \approx 1,4$.

3[ième] réduite : $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$

c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$

donc $\sqrt{2} \approx 1,4166\ldots$.

4[ième] réduite : $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$

c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{41}{29}$

donc $\sqrt{2} \approx 1,4137\ldots$.

Comment va-t-on différencier à chaque étape, les décimales exactes de celles qui ne le sont pas ? On obtenait, en effet, dès la troisième réduite 1,41 mais cela ne sera confirmé qu'après le calcul suivant (les décimales exactes “ne changent plus”).

En utilisant cette méthode, nous pouvons trouver les premières décimales exactes de $\sqrt{x}$ quel que soit x. Prenons par exemple $\sqrt{5}$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{x_3}}}}$$

Nous avons ainsi trouvé les deux premières décimales exactes de $\sqrt{5}$. Voici les trois premières réduites.

1ière réduite : $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

donc $\sqrt{5} \approx 2{,}25$

2ième réduite : $2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} = \frac{38}{17}$

donc $\sqrt{5} \approx 2{,}2352$

3ième réduite : $2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{161}{72}$

donc $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$

Essayons d'appliquer la même méthode au nombre π. Il est facile de montrer que la partie entière de π est 3 (on le prouvera plus loin). On peut donc écrire π sous la forme suivante :

$E = 3 + \frac{1}{x}$ avec x entier plus grand que 1.

Si x = 2 alors $E = 3 + \frac{1}{2} = 3{,}5$

Si x = 3 alors $E = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$

Si x = 4 alors $E = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} = 3{,}25$ et ainsi de suite.

Ce n'est pas la peine de poursuivre car, dès la première étape, on ne sait pas si la valeur obtenue est inférieure ou supérieure à la valeur exacte de π. Nous ne pouvons donc pas utiliser cette méthode pour écrire π sous forme d'une fraction continue.

Par contre, tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous cette forme. Prenons par exemple 4,775 :

Etape 1 $4{,}775 = 4 + \frac{1}{x_1}$

c'est-à-dire $x_1 = \frac{1}{0{,}775} \approx 1{,}29$

Calcul de la première réduite :

$4{,}775 \approx 4 + \frac{1}{1} \approx 5$

Après le calcul de la première réduite, on trouve 5 comme approximation de 4,775 à l'unité près.

Etape 2 $4{,}775 = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_2}}$

c'est-à-dire $x_2 = \frac{0{,}775}{0{,}225} \approx 3{,}44$

Calcul de la deuxième réduite :

$4{,}775 \approx 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} \approx \frac{19}{4} \approx 4{,}75$

Après le calcul de la deuxième réduite, on trouve $\frac{19}{4}$ comme approximation de 4,775 ; on trouve ainsi la première décimale exacte de 4,775.

Etape 3 $4{,}775 = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x_3}}}$

c'est-à-dire $x_3 = \frac{0{,}225}{0{,}1} \approx 2{,}25$

Calcul de la troisième réduite

$4{,}775 \approx 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} \approx \frac{43}{9} \approx 4{,}777$

Après le calcul de la troisième réduite, on trouve $\frac{43}{9}$ comme approximation de 4,775 ; on trouve ainsi les deux premières décimales exactes de 4,775.

Etape 4 $$4{,}775 = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_4}}}}$$

$$x_4 = \frac{0{,}1}{0{,}025} \approx 4$$

Calcul de la quatrième réduite :

$$4{,}775 = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} = \frac{191}{40}$$

A la quatrième réduite, on trouve que $\frac{191}{40}$ est égale à 4,775.

Cette méthode ne présente aucun intéret pour les nombres décimaux car leurs décimales nous sont connues.

Toutes les fractions irréductibles peuvent se mettre sous cette forme. Prenons comme exemples $\frac{2}{3}$; $\frac{26}{3}$ et $\frac{3}{5}$:

- $\frac{2}{3} = 0 + \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$

  donc $\frac{2}{3} = 0 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}$ or $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

  On obtient ainsi la forme recherchée

  $$\boxed{\frac{2}{3} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

- $\frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$

  La forme recherchée est donc

  $$\boxed{\frac{2}{3} = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

- $\frac{3}{5} = 0 + \cfrac{1}{\frac{5}{3}}$ donc $\frac{3}{5} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}$

On obtient ainsi : $$\boxed{\frac{3}{5} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

On vient de vous présenter une méthode qui permet de trouver autant de décimales que l'on désire pour certains nombres non décimaux. Vous l'avez sans doute remarqué, cela nécessite de nombreux calculs longs et fastidieux ainsi qu'une certaine dextérité dans le maniement des écritures fractionnaires. En effet pour trouver la 10ième décimale de π, il faut nécessairement faire les calculs des 9 décimales précédentes et compléter les calculs jusqu'à obtenir une confirmation des résultats. Nous avons alors cherché une méthode pour obtenir directement la nième décimale voulue.

Pour ceux qui sont allergiques à ce genre de manipulation, nous allons leur proposer d'étudier la question d'un …

… point de vue géométrique.

Nous avons commencé par chercher une approximation du nombre π. π étant le rapport de la circonférence au diamètre, nous avons, à partir d'un cercle de rayon quelconque, dont le diamètre sera pris comme unité, construit un rectangle dont la longueur est le périmètre de ce cercle (donc π) et la largeur le diamètre (donc 1).

Puis nous avons découpé ce rectangle en carrés. Nous en avons obtenu 3. Donc :

$$\pi = 3 \times 1 + r \text{ avec } r < 1 \text{ d'où } \pi \approx 3.$$

On recommence le découpage en carrés et on trouve 7. Donc $\pi \approx 3 + 1/7$. Donc $\pi \approx 22/7$. On renouvelle l'opération et on obtient une suite de nombres entiers. Chaque nombre est obtenu en comptant le nombre de carrés à une étape donnée : 3 ; 7 ; 15 ; 1 ; … d'où une suite de fractions obtenues en calculant une approximation du côté du plus petit carré : 3 ; 22/7 ; 323/106 ; 355/113 …

A chaque fraction, nous avons deux décimales **exactes** de plus.

Fractions			
$\frac{3}{1}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{323}{106}$	$\frac{355}{113}$
Nombre de décimales exactes			
0	2	4	6

Cela confirme les approximations trouvées à l'aide de la méthode précédente.

Peut-on prévoir la suite de ce tableau sans recommencer les découpages ? De toutes manières, nous sommes limités par la précision de nos constructions. Ne trouvant aucune relation intéressante sur ces fractions, nous avons décidé d'appliquer la même méthode à $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ peut être construit facilement comme diagonale du carré de côté 1. Nous avons alors pris le rectangle de longueur $\sqrt{2}$ et de largeur 1 et appliqué notre méthode de découpage en carré. Nous avons obtenu la suite : 1, 2, 2, 2, 2 … et les fractions 1 ; 3/2 ; 7/5 ; 17/12 ; 41/29 …

On a alors remarqué que $2 \times 3 + 1 = 7$

$2 \times 7 + 3 = 17$

$2 \times 17 + 7 = 41$

donc en passant de $P_0/Q_0 = 1$, $P_1/Q_1 = 3/2$, $P_2/Q_2 = 7/5$ … On a la formule

$$P_n = 2 \times P_{n-1} + P_{n-2}$$

On trouve de même que

$$Q_n = 2 \times Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

On a alors cherché si les mêmes formules existaient pour π. On a alors trouvé les relations :

$$P_n = U_n \times P_{n-1} + P_{n-2}$$
$$Q_n = U_n \times Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

où $(U_n)_n$ est la suite des nombres obtenus par le découpage $U_0 = 3$, $U_1 = 7$, $U_2 = 15$, $U_3 =1$ … On a alors remarqué que pour $\sqrt{2}$, on avait démontré que $U_n = 2$ pour tout n donc les formules pour π et $\sqrt{2}$ sont les mêmes. On a pensé que ces formules étaient vraies pour tout nombre et on a décidé d'essayer avec $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (c'est le nombre d'or).

On construit géométriquement un rectangle de longueur $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et de largeur 1 et on le découpe en carrés de la même manière que précédemment. On trouve toujours 1 carré. Les fractions que nous obtenons sont :
1 ; 2 ; 3/2 ; 5/3 ; 8/5 ; 13/8 ; ... ; P_n/Q_n.

Comme $u_n = 1$ pour tout n, nous constatons que notre formule reste vraie. Donc pour <u>tout nombre</u> :

$$P_n = U_n \times P_{n-1} + P_{n-2}$$
$$Q_n = U_n \times Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

On a alors constaté que pour calculer P_n/Q_n on avait besoin de connaître la suite $(u_n)_n$ et les deux termes précédents et on a cherché à exprimer P_n et Q_n **uniquement** en fonction de n.

Nous avons aussi constaté que pour $\sqrt{2}$ si on multipliait les dimensions du rectangle obtenu au troisième découpage par ($\sqrt{2}$ + 1) on trouvait les dimensions du rectangle du deuxième découpage. Donc en changeant d'échelle on était ramené au même partage donc la suite ne comporterait que des 2 à partir du deuxième rang.

De même pour le nombre $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, en multipliant les dimensions du deuxième rectangle par $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ on retrouvait les dimensions du premier rectangle et que donc en changeant d'échelle on se ramenait au même partage. Donc la suite ne comporterait que des 1.

On a alors cherché à se renseigner sur le nombre d'or et on a découvert qu'il avait un rapport très étroit avec la suite de Fibonacci.

En continuant nos recherches, nous avons découvert que toute suite dont le terme général s'exprime de manière linéaire en fonction des deux précédents peut s'écrire sous la forme $a \times r^n$.

Il nous restait à déterminer a et r ce que nous avons fait en utilisant les deux premiers termes de la suite et en résolvant des systèmes de deux équations à deux inconnues.

Ce faisant nous avons été amenées à résoudre des équations du deuxième degré à une inconnue et nous avons trouvé une méthode en utilisant les identités remarquables.

Pour le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, nous avons trouvé :

$$P_n = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$Q_n = P_{n-1}$$

Pour le nombre $\sqrt{2}$, nous avons trouvé :

$$P_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \times \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

$$Q_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

Nous avons alors écrit différents programmes en langage BASIC pour vérifier que ces formules fournissaient bien les mêmes résultats que les formules de récurrence obtenues avant.

CALCUL DES FRACTIONS
POUR $\sqrt{2}$
AVEC LA FORMULE
DE RECURRENCE

$$\boxed{\begin{array}{c} P_n = u_n \times P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = u_n \times Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{array}}$$

PROGRAMME :

```
10 CLS
20 N=2
30 P0=1 : P1=3 : Q0=1 : Q1 = 2 (initialisation des variables)
40 P2 = 2*P1 + P0 : Q2=2*Q1 + Q0
50 PRINT "P(";N;")/Q(";N;")=";P2;"/";Q2 (affichage résultat)
60 P0=P1 : P1=P2 : Q0=Q1 : Q1 =Q2 : N=N+1
70 IF N<19 THEN GOTO 40
80 END
```

Ce programme permet d'obtenir les 18 premières fractions puisqu'on a mis n < 19.

PROGRAMME AVEC NOTRE FORMULE :
On entre n et on obtient directement le résultat.

```
10 CLS
20 INPUT "entrer le nombre n: ",N
30 P=SQR(2)/2 +1/2
40 Q=-SQR(2)/2 +1/2
50 R= P*(1+sqr(2))^n+q*(1-SQR(2))^n
60 P1= (2-sqr(2))/2
70 Q1= (2+sqr(2))/2
80 R1= P1 * (1 - sqr(2))^n + Q1*(1+sqr(2))^n
90 print "p(";n;")/q(";n;")=",R;"/";R1
100 END
```

On vérifie facilement qu'à part quelques décimales parasites dues aux arrondis les résultats sont identiques. Nous avons fait les mêmes programmes pour le nombre d'or et là aussi les résultats coïncidaient. Nos formules sont compliquées mais intéressantes puisqu'elles nous permettent d'obtenir des approximations aussi précises que l'on veut sans avoir à calculer les termes précédents. Cependant nous n'avons pas pu trouver de telles formules pour π puisque la suite qui lui est associée n'est pas constante. π est ce qu'on appelle un nombre **transcendant**.

Nous avons arrêté nos recherches car l'année scolaire touche à son terme. Cependant, le sujet est encore loin d'être clos ; alors peut-être à l'année prochaine pour la suite !