somme des chiffres

par Gilles Chabert, Céline …, Aline Rossini, des lycées Saint Exupéry et Jean Moulin de Lyon

enseignants : Marie-Claude Pontille et Serge Betton

chercheur : Christian Mauduit

Thème de recherche :
comment obtenir la parité de la somme des chiffres d'un nombre entier écrit en base 2 grâce à un algorithme simple ?

Pour y répondre, on s'interroge sur ce qu'est la base 2. On en vient à chercher quels sont les principes d'une base :

Principe des bases

Pour toute base n ($n \in N$) le nombre qui s'écrit $a_k \dots a_3a_2a_1$ a pour valeur

$$a_1 \times n^0 + a_2 \times n^1 + a_3 \times n^2 + \dots a_k \times n^{k-1}$$
sachant que $a_i \in \{0 \dots (n-1)\}$
et que $i \in \{0 \dots k\}$

(en base 2, les chiffres d'un nombre peuvent prendre pour valeur soit 0 soit 1)

<u>exemple :</u> le nombre qui s'écrit en base 2 11010 a pour valeur $2^1 + 2^3 + 2^4 = 26$ (en base 10). Ce même nombre s'écrira donc en base 3 : 222 car $2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 = 26$.

La somme des chiffres

Après avoir étudié la suite des sommes des chiffres des nombres binaires sur une grande échelle on conclut que cette suite semble se construire suivant un algorithme. Afin de déterminer cet algorithme, on cherche en premier lieu quels sont les nombres qui ont la même *somme des chiffres*. On trouve alors qu'un nombre et son double répondent à cette condition.

Preuve :
soit x un entier qui s'écrit $a_k \dots a_2a_1$
$x = a_k \times 2^{k-1} + \dots a_2 \times 2^1 + a_1 \times 2^0$
étant donné que $2 \times 2^k = 2^{k+1}$ alors
$2x = a_k \times 2^{(k-1)+1} + \dots a_2 \times 2^{1+1} + a_1 \times 2^{0+1}$
Le coefficient de 2^0 prend la valeur de 0 donc en base 2 le double de x s'écrira $a_k \dots a_2a_10$
La parité de la somme, S(2x), des chiffres de 2x est donc la même que celle, S(x), de x puisque la somme est la même.

$$S(x) = S(2x) \qquad (1)$$

Maintenant que nous savons que tous les nombres qui sont les doubles d'un entier se terminent par un 0, rajouter 2^0 à ces nombres reviendra à remplacer ce 0 par un 1 donc à faire varier la somme des chiffres de telle sorte que si celle-ci est paire elle deviendra impaire et réciproquement.

$$S(2x + 1) = S(2x) + 1 \qquad (2)$$

Preuve :
$2x + 1 = a_k \times 2^k + \ldots a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

Exemple :

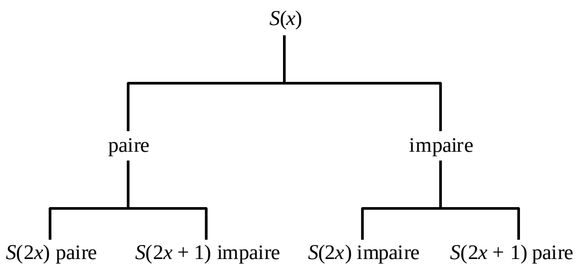
7 s'écrit 111 en base 2 (la somme des chiffres est 3) donc 14 s'écrit 1110 en base 2 et la somme des chiffres ne change pas.

15 = 14 + 1 s'écrit 1111 ; la somme des chiffres est alors 4.

On a bien :
S(14) = S(7) et S(15) = S(14) + 1 = S(7) + 1.

La suite des parités

Avec les deux relations (1) et (2) nous possédons un algorithme qui peut s'appliquer pour tous les nombres entiers :



L'intérêt de cet algorithme est de pouvoir déterminer la parité de la somme des chiffres (voire la somme même) d'un nombre grâce à ce procédé qui consiste à diviser successivement ce nombre par deux après lui avoir soustrait 1 ou non suivant qu'il est le double d'un entier ou non. On en vient ainsi à une parité connue : celle de 0 (c'est-à-dire paire).

Questions non résolues

Qu'en est-il de la suite des parités de la somme des chiffres des multiples de 3 … et des carrés ?