

# DES PONTS, DES PORTES, ... DES GRAPHES.

par Jérémie Bernard, Frédéric Corblin, Jessy Dreze, Laurent Lefebvre, Arnaud Pauwels, Claude Van Opstal, Grégory Vandamme, Geoffrey Wery.

Parrain du projet : Andre PARENT, Athénée Royal, Institut technique de la Communauté Française, Lycée de la Communauté Française, Rue du Beau-Chêne 36, 7700 Mouscron (Belgique).

Léonard Euler, mathématicien suisse (1707-1783), a été confronté, lors de son séjour à Königsberg, au problème des sept ponts, lequel consiste à passer une et une seule fois sur chacun d'eux.

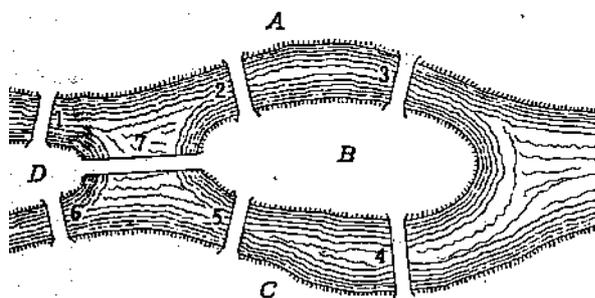


Figure n° 1

Créant la théorie des graphes, L. Euler prouva alors l'impossibilité d'une solution (1736).

Le jeu suivant consiste à dessiner une figure d'un seul trait de crayon c'est-à-dire sans lever le crayon ni repasser sur le même trait.

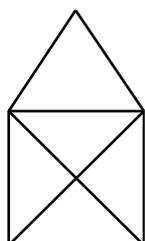


Figure n° 2

Des informations quant à une solution se déduisent grâce à cette même théorie des graphes.

## Loi de Lou 3, Emilie 1 et Julien 1 :

La loi de Julien est très générale, on peut se demander si il existe une loi pour deux additions c'est-à-dire : de combien de façons peut-on écrire  $N = A + B + C$  ?

(...)

Des 35 hexaminos (figures obtenues en juxtaposant six carrés) voici les onze développements du cube :

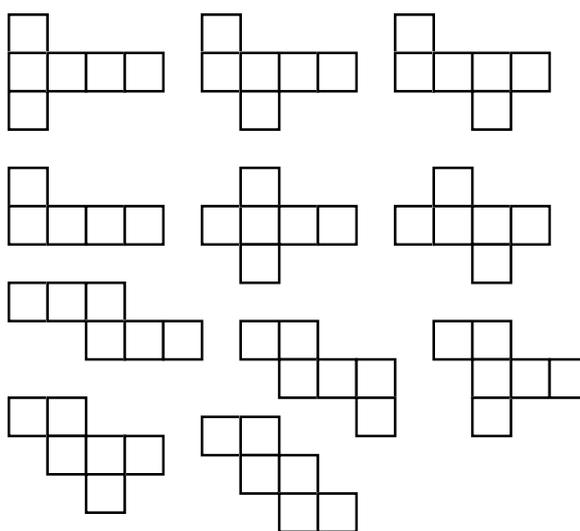


Figure n° 3

Les quatre patrons ci-dessous peuvent être dessinés d'un seul trait de crayon.

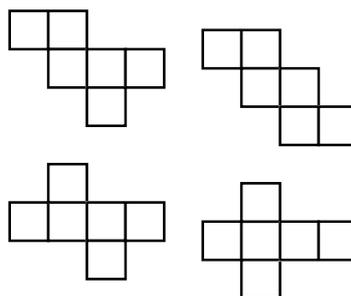


Figure n° 4

Dans l'agrandissement ci-dessous (page suivante), les nombres en grands caractères sont les degrés de chaque sommet, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui y arrivent. Les points A et B représentent le départ et l'arrivée du chemin solution proposé lequel se découvre en suivant les nombres, en petits caractères, dans l'ordre croissant.

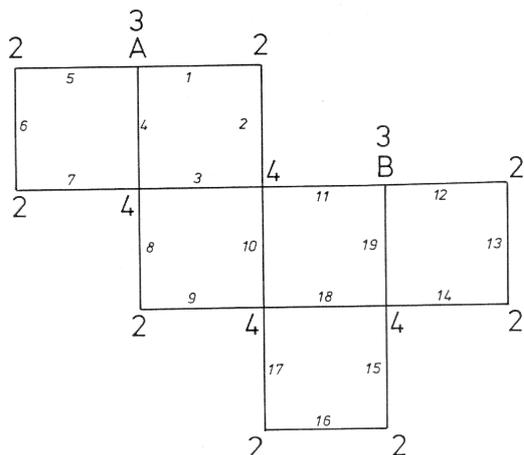


Figure n° 5

Notons que A et B sont les seuls points de degré impair et qu'un chemin eulérien existe si 0 ou 2 sommets sont de degré impair.

**Enoncé du jeu dans le Musée**

Un musée d'art chinois comporte sept salles abritées dans un bâtiment de forme carrée. Chaque pièce communique avec la salle voisine ou avec l'extérieur par une porte. Imaginez le trajet du gardien, devant fermer ces portes le soir, qui ne franchirait chacune d'elles qu'une et une seule fois.

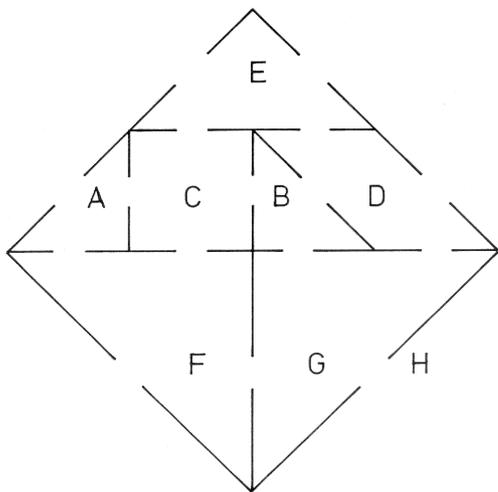
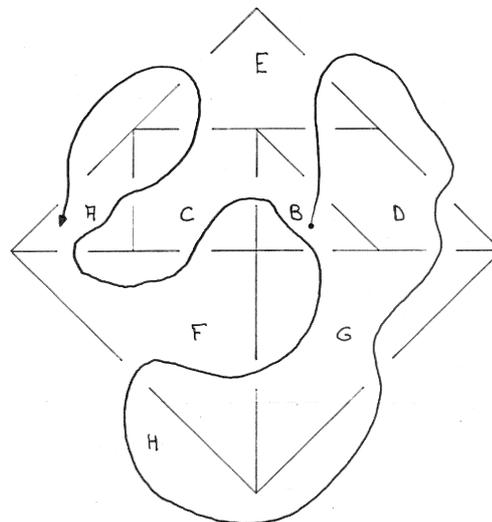


Figure n° 6

Les différentes salles de ce musée, inspiré du puzzle TANGRAM qui serait d'origine chinoise, nommées A, B, C, D, E, F et G ainsi que l'extérieur H, jouent le même rôle que les rives du problème des sept ponts et que les sommets des patrons du cube.

Le tableau de synthèse ci-dessous est une aide pratique à la recherche d'une solution.

SALLES	NOMBRE DE PORTES (degré des sommets)
A	3
B	3
C	4
D	4
E	4
F	4
G	4
H	6



B D E H D G H F G B C F A C E H A.

Figure n° 7

La solution proposée s'accompagne du codage obtenu en citant les pièces traversées par le gardien.

Le chemin commence en B et se termine en A, seules pièces de degré impair (trois portes pour chaque salle).

**La conquête du Nouveau-Monde.**

Le schéma suivant représente l'implantation de la section maternelle de l'école communale du Nouveau-Monde à Mouscron (Belgique).

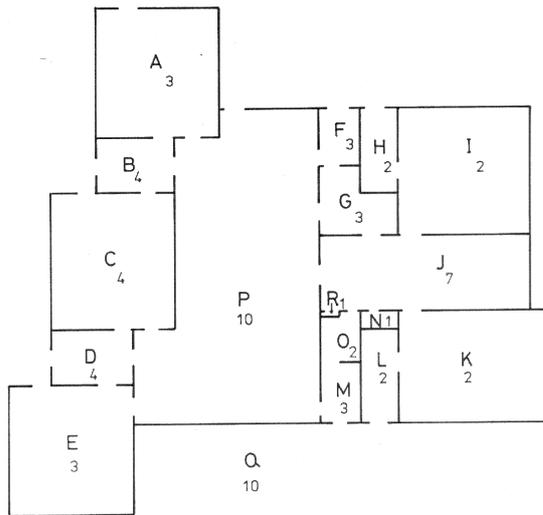


Figure n° 8

Le jeu-problème suivant se déroule dans ces locaux. *Enoncé du jeu* : On me passe sans me traverser. **Qui suis-je ?**

**La quête du bonheur.**

Vous n'aurez de repos tant que mes sœurs et moi-même vous aurons vu nous franchir. Mais attention, après votre passage, nous sommes définitivement dans la position close. De plus, prenez garde à ne pas rester prisonnier du bâtiment. Le bonheur vous sourira alors à l'extérieur.

*Commentaires :*

- le personnage à découvrir est une porte ;
- le jeu consiste donc à franchir chacune d'elles, une et une seule fois et à terminer ce chemin eulérien à l'extérieur ;
- tel quel le problème est impossible, car plus de deux salles sont de degré impair (nombre impair de portes) ;
- en condamnant les locaux N et R (une seule porte) et un nombre minimum de portes on obtient le schéma suivant (figure 9).

Trouvez alors un chemin eulérien en évitant de croiser votre parcours.

(...)  
 Il serait bon pour les deux autres de donner une façon de compter les partitions de 10 ou 15 ou bien les décompositions  $A + B \times C$  sinon on n'est jamais sûr de ne pas en oublier (par exemple, je trouve 22 façons d'écrire  $15 = A + B \times C$ ).  
 (...)

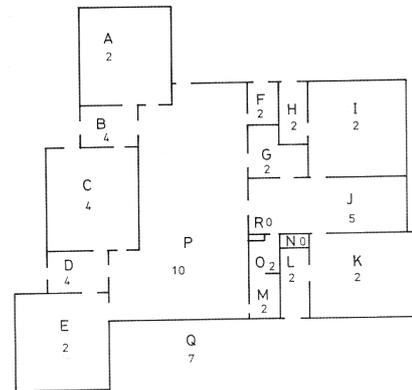


Figure n° 9

Voici une solution : J I H Q F P G J K L Q D E P D C P M O J P Q B A P B C Q.

**Le jeu icosien ... ou dodécaédrien ?**

Le dodécaèdre, solide à faces pentagonales régulières, comporte vingt sommets.

HAMILTON, mathématicien irlandais, a commercialisé en 1859 un jeu consistant à trouver un circuit, parcourant les arêtes, et passant une et une seule fois par chacun des vingt sommets et, bien sûr, revenant au point de départ.

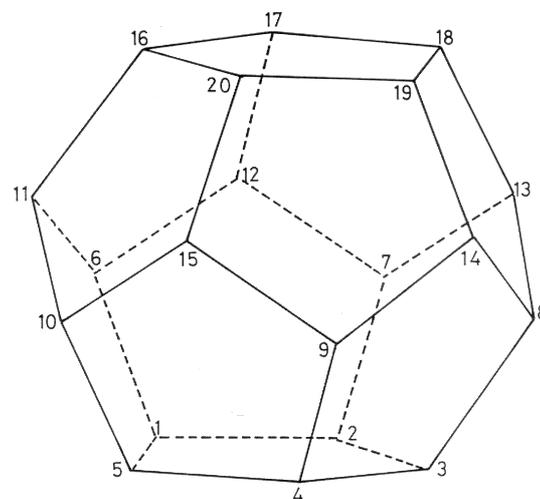


Figure n° 10

Les numéros des sommets sont associés ici à des noms de villes où des rencontres scientifiques eurent lieu ces dernières années :

VILLES	NUMERO
-----	-----
BREST	15
BRUXELLES	13
COPENHAGUE	7
DUBLIN	4
DUSSELDORF	14
FRANCFORT	8
JOHANNESBURG	12
KOUROU	18
LILLE	16
LUXEMBOURG	6
MADRID	9
NAMUR	1
PARIS	17
PORTO	20
PRAGUE	5
QUEBEC	19
RABAT	10
STOCKHOLM	11
TOULOUSE	3
ZURICH	2

Un tel parcours est qualifié d'hamiltonien. Voici un circuit hamiltonien :

1 2 7 13 18 19 20 16 17 12 6 11 10  
15 9 14 8 3 4 5 1

et un chemin hamiltonien :

1 6 11 10 5 4 9 15 20 16 17 12 7 2 3  
8 13 18 19 14

Le projet complet a été présenté :

(1) les 3 et 4 Mai 1991 à Namur (Belgique) dans le cadre de l'exposciences des Jeunesses Scientifiques de Belgique.

(2) les 20 et 21 Juillet 1991 à Bruxelles (Belgique) au Palais du Heysel dans le cadre des festivités royales 60-40

(3) du 15 au 20 juillet 1991 à Prague (Tchécoslovaquie) dans le cadre de la 3<sup>ème</sup> exposciences internationale

(4) du 11 au 14 Avril 1992 à Paris (France) dans le cadre du 3<sup>ème</sup> Congrès MATH EN JEANS

### *Bibliographie*

**Oystein ORE,**

Les graphes et leurs applications, Dunod  
Tangente 13, Archimède

Math-Jeunes 27, SBPM

**E.P. Northrop,**

Fantaisies et paradoxes mathématiques,  
Dunod

**Edouard Lucas,**

Le jeu icosien, Quadrature 7, novembre-décembre 1990

**Ian Stewart,**

Ourobos, ourotore, codage et problèmes annexes non résolus, Pour la Science 123, janvier 1988

**Pierre Tougne,**

Combien de patrons un polyèdre peut-il avoir ?, Pour la Science 103, mai 1986

**Martin Gardner,**

A propos de graphes qui peuvent aider les cannibales, les missionnaires, les loups, les chèvres et les choux à traverser une rivière, Pour la Science 31, mai 1980

**J. Meeus, P.J. Torbijn,**

Polycubes, Cédic