Les cinq solides de Platon

par Christophe Egile, Eric Forzy, et ???
des lycées Alfred Kastler de Cergy-Pontoise et Fragonard de l'Isle-Adam

enseignantes : Mmes Annick Boisseau, Anne Kérharo et Annie Soismier

chercheur : Mme Michèle Vergne, Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure.

Le thème proposé est la symétrie dans le plan et dans l'espace. Nous nous sommes intéressés aux polyèdres qui sont des figures de l'espace à plusieurs faces. Nous avons trouvé deux sortes de polyèdres : le convexe, notamment le cube, la pyramide dont les points sont inscrits sur une sphère, et les non convexes comme les polyèdres étoilés.

Nous entreprendrons donc de démontrer la **formule d'EULER : S + F = C + 2** et par la suite nous démontrerons l'existence d'au plus cinq polyèdres réguliers : les 5 solides de PLATON. Nous allons ensuite remplir l'espace avec l'un de ces 5 solides : le tétraèdre.

I.— La démonstration de la théorie d'EULER par récurrence sur la sphère.

En premier lieu, nous allons raisonner sur le nombre de côtés.

LA FORMULE D'EULER : S + F - C = 2

DEFINITIONS :
Un dessin sur une sphère est un ensemble de points, avec au moins un point, et d'arcs tel que :
— 2 points distincts de notre ensemble sont reliés par une succession d'arcs de notre ensemble.
— Chaque arc de notre ensemble relie 2 points, pas forcément distincts, de notre ensemble.

<u>Loi de Mohammed</u>

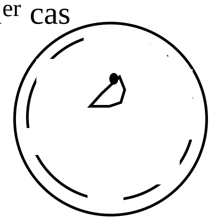
On peut faire les multiplications de la façon suivante :

123
x24
123
123
123
123
1230
1230
2952

— 2 arcs ne se coupent jamais.
----> En appelant (S) SOMMET le point, et (C) ARETE l'arc, il nous reste à définir ce qu'est une (F) FACE : toujours dans une sphère, si l'on part d'un point qui n'est pas sur une arête, la face qui contient ce point serait l'ensemble de tous les points qui rejoindrait le point de départ, sans couper une arête.
— convexes : on dit qu'une figure est convexe si le segment formé par deux sommets quelconques de cette figure est situé à l'intérieur de cette figure.

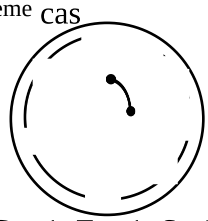
1ère étape : on pose C = 1, nous avons donc 2 cas de dessins possibles :

1er cas



C = 1, F = 2, S = 1

2ème cas

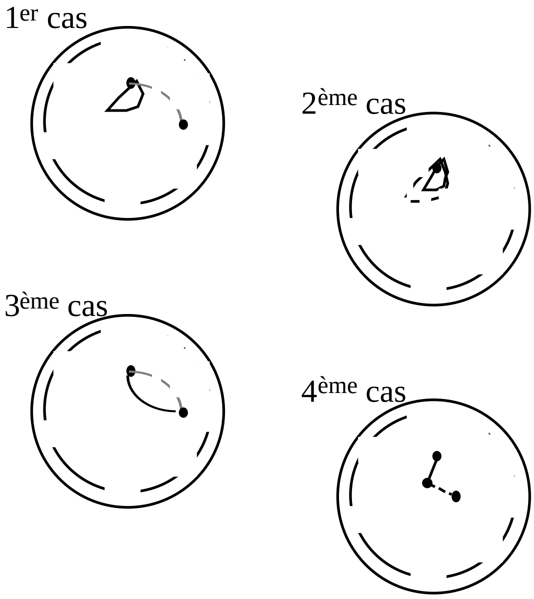


C = 1, F = 1, S= 2

On calcule S + F - C et on remarque que la formule S + F - C = 2 est bien vérifiée. Le théorème d'Euler est donc bon pour C = 1.

2ème étape : nous allons ensuite supposer que pour N côtés le théorème est vrai. Il nous reste maintenant à savoir si la formule est vraie pour (N + 1) côtés. C'est ceci qui constitue le principe "d'héridité".

On considère un polyèdre convexe de N côtés tel que : S + F - N = 2. Nous avons 4 cas de dessins possibles à partir d'une figure de N côtés conduisant à une figure de (N + 1) côtés respectant les conditions.



légende : ——côté déjà existant (parmi N)
----côté rajouté (d'où N+1 côtés)

1er cas :	2ème cas :
On a (N + 1) côtés	On a (N + 1) côtés
(F + 1) faces	(F + 1) faces
et S sommets	et S sommets
S + (F+1) - (N+1) =	S + (F+1) - (N+1) =
S + F - N = 2	S + F - N = 2

Ces deux cas sont identiques.

3ème cas	4ème cas
On a (N + 1) côtés	On a (N + 1) côtés
(F + 1) faces	F faces
et S sommets	et (S + 1) sommets
S + (F+1) - (N+1) =	(S+1) + F - (N+1) =
S + F - N = 2	S + F - N = 2

Nous pouvons donc affirmer que le theorème d'EULER est donc vrai pour (N + 1) en ayant supposé qu'il était vrai pour les polyèdres convexes de N côtés.

Nous venons donc de démontrer le théorème d'EULER par récurrence.

II.— la démonstration de l'existence des 5 solides de Platon.

Les 5 solides de PLATON sont des polyèdres réguliers convexes. Le polyèdre de PLATON est un solide qui est constitué par des faces identiques (polygones réguliers) et un même nombre de côtés issus de chaque sommet.

Un même nombre de côtés délimitant chaque face et un même nombre de côtés est issu de chaque sommet, nombres qu'on notera f et v. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} fF = 2C \;\; -> \;\; F = 2C / f \\ vS = 2C \;\; -> \;\; S = 2C / v \end{array}\right\} \text{Chaque côté étant compté deux fois.}$$

On remplace dans la formule d'EULER :

$$2C/f + 2C/v = C + 2$$

On divise cette expression par 2C et on obtient : $1/f + 1/v = 1/C + 1/2$

On sait que $1/C > 0$ donc

$$1/f + 1/v > 1/2 \;\; ----> \;\; 1/f > 1/2 - 1/v$$

Supposons $v \geq 6$, on en déduit : $1/v \leq 1/6$ d'où l'opposé $- 1/v \geq - 1/6$ donc $1/f > 1/2 - 1/6$
On en déduit que : $1/f > 1/3$. $f < 3$. Donc le cas $v \geq 6$ est faux donc $v < 6$.
Or $v > 2$ donc les valeurs possibles pour v seront 3, 4 et 5.

$$2 < v < 6$$

* 1er cas : $v = 3$

$$1/f + 1/3 > 1/2$$
$$1/f > 1/2 - 1/3$$
$$1/f > 1/6$$
$$----> \;\; f < 6$$

donc f peut prendre comme valeurs : 3,4 et 5.

1er sous-cas : $f = 3$ $\quad v = 3$

$$1/f + 1/v = 1/C + 1/2$$
$$1/3 + 1/3 = 1/C + 1/2$$
$$2/3 - 1/2 = 1/C$$
$$1/6 = 1/C$$
$$6 = C$$

$F = 2C/f = 2(6/3) = 4$
----> C'est le cas du TETRAEDRE

2ème sous-cas : f = 4 v = 3

1/f + 1/v = 1/C + 1/2
1/4 + 1/3 = 1/C + 1/2
7/12 = 1/C + 6/12
1/12 = 1/C
12 = C

F = 2C/f = 2(12/4) = 6
----> C'est le cas du CUBE

3ème sous-cas : f = 5 v = 3

1/f + 1/v = 1/C + 1/2
1/5 + 1/3 = 1/C + 1/2
16/30 = 1/C + 15/30
1/30 = 1/C
30 = C

F = 2C/f = 2(30/5) = 12
----> C'est le cas du DODECAEDRE

* 2ème cas : v = 4

1/f + 1/v > 1/2
1/f + 1/4 > 1/2
1/f > 1/2 - 1/4
1/f > 1/4
----> f < 4 donc la seule valeur que peut prendre f est 3 car 2 < f < 4.

Sous-cas : f = 3 v = 4

1/f + 1/v = 1/C + 1/2
1/3 + 1/4 = 1/C + 1/2
7/12 - 6/12 = 1/C
1/12 = 1/C
12 = C

F = 2C/f = 2(12/3) = 8
----> C'est le cas de l'OCTAEDRE

* 3ème cas : v = 5

1/v + 1/f > 1/2
1/5 + 1/f > 1/2 - 1/3
1/f > 3/10

----> 2 < f < 10/3 donc la valeur que peut prendre f est 3.

Sous-cas : f = 3 v = 5

1/f + 1/v = 1/C + 1/2
1/3 + 1/5 = 1/C + 1/2
16/30 = 1/C + 15/30
1/30 = 1/C
30 = C

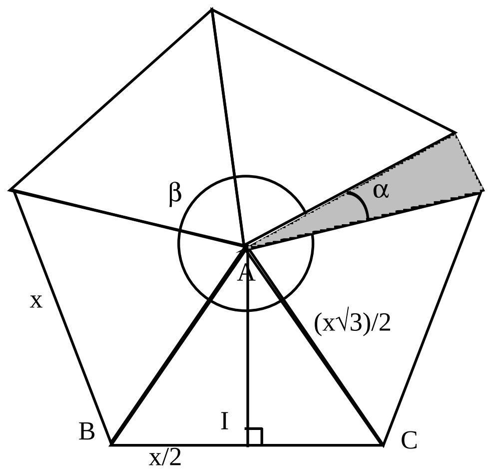
F = 2C/f = 2(30/3) = 20
----> C'est le cas de l'ICOSAEDRE

Loi de Charlotte 1
Si A et B sont n'importe quels nombres :
A + B = B + A
A x B = B x A
A - B ≠ B - A

En fait, nous avons démontré qu'il existe au plus 5 solides ; c'est-à -dire que l'on est sûr qu'il n'existe pas 6 solides, mais ce dont on est pas certain c'est qu'il existe 5 solides platoniciens.

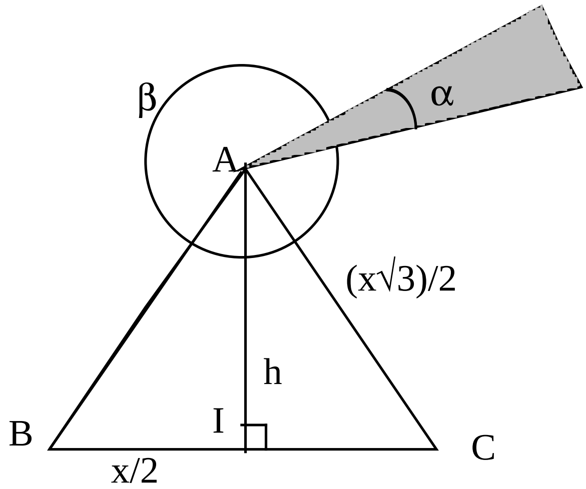
III.— Les tétraèdres réguliers : pavages dans l'espace.

Nous avons fait un projeté du plan médiateur de manière à visualiser sur papier l'ensemble formé par les tétraèdres : on s'aperçoit qu'il reste un espace libre insuffisant pour y placer un sixième tétraèdre.



Nous allons démontrer que l'angle α est inférieur à l'angle BAC :

Précisions :
[AC] est la hauteur d'un des tétraèdres ; nous avons pris x comme mesure d'un côté de tétraèdre ; donc AC = x√3/2. De plus, h (ou AI) est la hauteur du triangle ABC, et de ce fait AIC est rectangle en I.



Démonstration :
Grâce au théorème de Pythagore, nous disons que :

$$h^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Nous savons que :

$$\cos \widehat{IAC} = \frac{h}{AC}, \text{ d'où } \widehat{IAC} = \cos^{-1}\left(\frac{h}{AC}\right)$$

Pour calculer l'angle IAC, nous prenons 5 pour valeur de x :

$$\widehat{IAC} = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{5\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{4}{6}}\right) = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\widehat{IAC} \approx 35{,}2\,°,$$

donc $\widehat{BAC}$, double de $\widehat{IAC}$, $\approx 70{,}4\,°$

$$\beta = 5\,\widehat{BAC} \approx 5 \times 70{,}4 \approx 352°$$

$$\alpha = 360° - \beta \approx 360° - 352° \approx 8°$$

Conclusion :
l'angle α est inférieur à l'angle BAC, donc il n'y a pas assez de place pour un sixième tétraèdre.

cliché Chantal Rousselin © Palais de la découverte.