Pavement de figures géométriques simples

(cercle, carré) à l'aide de figures géométriques plus petites et de même type (cercles, carrés).

par Gaël Chauvin, Olivier Chodkiewicz, Arthur Choukroun, Jean-François Lecointe (2^{nde}) du Lycée Emmanuel Mounier de Grenoble.

enseignants : MM. Stéphane Chavaz et André Laur.

chercheur : M. Charles Payan, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de Grenoble.

Des carrés,

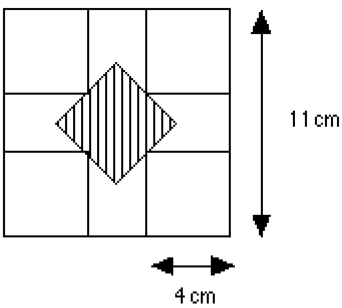
I.— Objectif : Mettre le plus possible de carrés de côté n (n entier), sans qu'ils se chevauchent (mais peuvent se toucher) dans un carré de 11 cm.

Règle 1 (non prouvée) : Si on met un carré C de côté strictement supérieur à 5,5 cm dans le carré 11 x 11 alors le centre de ce dernier sera à l'intérieur de C.

De cette règle, on en déduit qu'il est impossible de mettre deux carrés de côté 6 cm, avec les conditions imposées, dans un carré de côté 11 cm.

<u>côté 5 :</u> On met immédiatement quatre carrés 5 x 5 dans le carré 11 x 11. On ne peut en mettre plus à cause des aires : 5 x 5^2 > 11^2

<u>côté 4 :</u> On a réussi à en mettre 5 : on a vérifié, par le calcul, que le carré hachuré a un côté strictement supérieur à 4 cm.



<u>Loi de Amanda 1</u>

Si N est n'importe quel nombre, il existe une infinité de nombres A et B tels que :

$$A - B = N$$

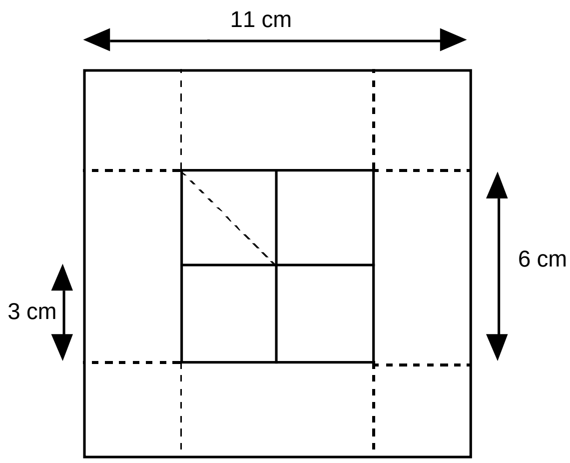
Il y a une infinité de soustractions qui font N.

On suppose qu'on ne peut pas en mettre 6 de côté 4 cm dans le carré 11 x 11, mais on n'a pas trouvé de raison valable. En faisant le calcul sur les aires, on voit qu'on ne peut pas en mettre 8 car 16 x 8 = 128 > 121

des ronds,

II.— Objectif : Mettre le plus possible de disques de diamètre 5, sans qu'ils se chevauchent, dans un carré de 11 cm.

Règle 2 (zone de centres possibles) : Si un disque de diamètre 5 est dans le carré 11 x 11 alors nécessairement son centre est dans le carré de côté 6 cm et de même centre que celui du carré 11 x 11 (cf. dessin ci-dessous). (Car il est immédiat qu'un point du carré 11 x 11 et pas dans ce carré 6 x 6 est à une distance strictement inférieure à 2,5 cm de l'un des 4 bords du carré 11 x 11).



Puis on divise ce carré 6 x 6 en 4 cases égales (cf. dessin).

Règle 3 : Si on a 5 objets à mettre dans 4 cases, il y a forcément une case qui contiendra au moins 2 objets.

Si on veut mettre 5 disques dans le carré 11 x 11, d'après la règle 3, il y aura forcément un carré 3 x 3 qui contient deux centres. De sorte que ces deux centres sont distants d'au plus la diagonale d'un carré 3 x 3 c'est à dire $3\sqrt{2} < 5$; on aboutit à une absurdité. D'où le :

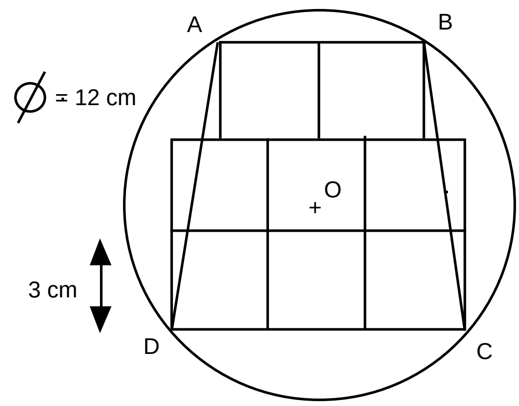
Résultat : On ne peut pas mettre 5 disques de diamètre 5 dans un carré 11 x 11.

D'autre part, puisqu'on peut évidemment mettre dans le carré 11 x 11, 4 carrés 5 x 5, *a fortiori* on peut y mettre 4 disques de diamètre 5.

des cercles et des carrés,

III.— Objectif : Mettre le plus possible de carrés de côté 3 cm, sans qu'ils se chevauchent, dans un disque de diamètre 12 cm.

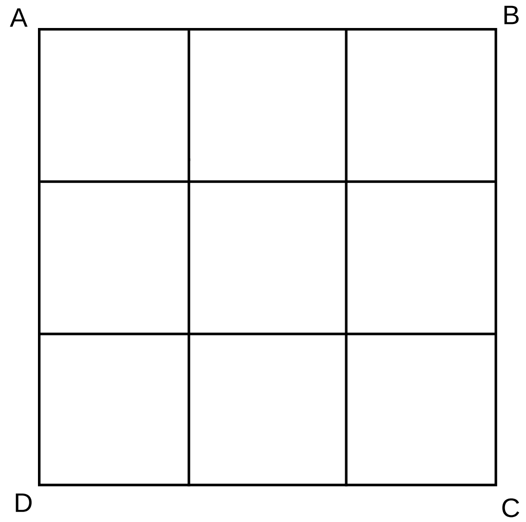
Idée : Prenons le problème à l'envers. C'est-à-dire : On essaye de disposer 8 (par exemple) carrés de 3 x 3 de manière à avoir la figure la plus symétrique et la plus compacte “possible”:



Le trapèze ABCD est isocèle. Considérons donc le cercle (de centre O) passant par les points A, B, C, D. Il est clair que ce cercle contient les 8 carrés en son intérieur et que c'est le cercle de rayon le plus petit possible qui contienne les 8.

Par calcul, on trouve que OA (le rayon du cercle) vaut environ 5,9 cm : on peut donc mettre 8 carrés 3 x 3 dans un disque de diamètre 12.

D'autre part, il semble impossible d'en mettre 9 (calculs faits avec la figure ci-dessous qui nous semble la “meilleure” pour ranger 9 carrés dans un disque).



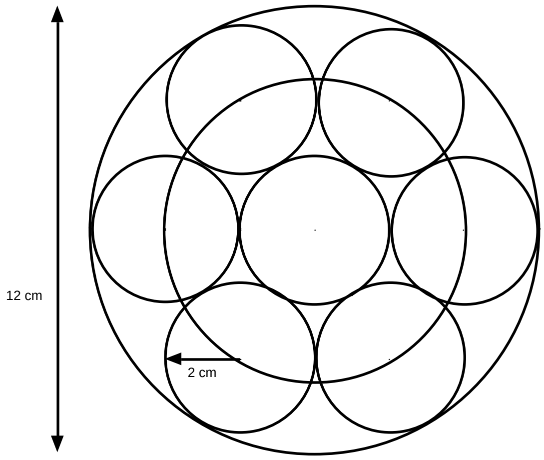
… et encore des cercles.

IV.— Objectif : Mettre le plus possible de disques de diamètre n (n entier), dans un disque de diamètre 12 cm (et de centre O).

Procédé du remplissage :
On remarque que le centre d'un disque de rayon r strictement inférieur à 6 et contenu dans le disque de diamètre 12 est forcément contenu dans le disque de centre O et de rayon (6 - r).
D'où une idée de décomposition des centres de disques de rayon r qu'on veut mettre dans le disque de diamètre 12 : on les place comme sommets de polygones réguliers sur des cercles concentriques de centre O et de rayon (6 -r), (6 - 3r), (6 - 5r)

Sur le cercle de centre O et de rayon (6 - r) on place les sommets d'un polygone régulier à n côtés, n étant le plus grand possible tel que le côté de ce polygone soit supérieur ou égal à 2π (afin que les disques de rayon r ne se chevauchent pas).
On recommence sur le cercle de centre O et de rayon (6 - 3r), puis sur le cercle de centre O et de rayon (6 - 5r) et ainsi de suite jusqu'à (6 - (2k+1)) r où (6 - (2k+1) r)> 0 et ((6 - (2k+3) r ≤ 0)).

Le dessin ci-dessous a été réalisé dans le cas où r = 2.



NDLR : à propos de pavements, voir l'article “Cristaux et Quasi-Cristaux” [p. 115] et l'article “Frises et pavages dans le plan” [p.85].

<u>Loi de Vanessa / Albine 1</u>

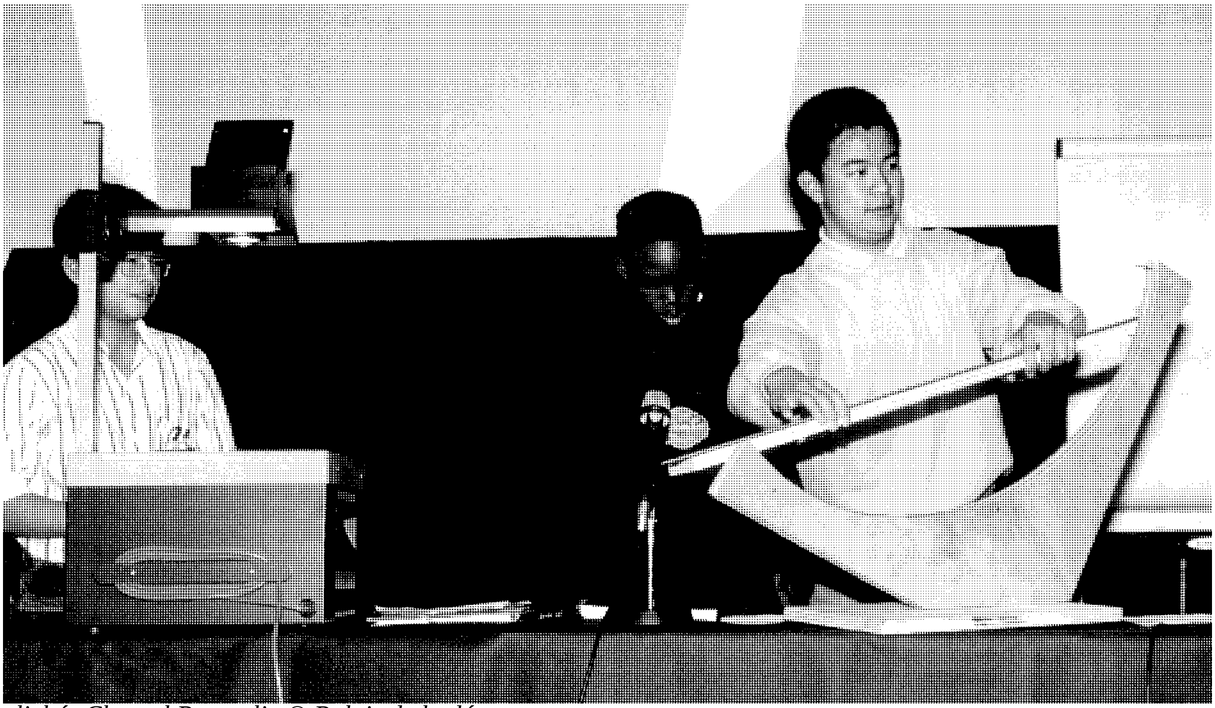
Il y a des infinis plus grands que d'autres :

L'infini des nombres à virgule est plus grand que l'infini des nombres qui n'ont pas de virgule.

Preuve : entre 0 et 1, il y a une infinité de nombres à virgule.
entre 1 et 2, il y a une infinité de nombres à virgule.
entre 2 et 3, il y a une infinité de nombres à virgule.
entre …

Entre chaque nombre sans virgule (on les appelle des nombres entiers), il y a une infinité de nombres à virgule.

l'atelier “MATh.en.JEANS” [voir pages 177 à 180].
photo © Eric Forzy.



clichés Chantal Rousselin © Palais de la découverte.