Frises et pavages dans le plan

par Nathalie Prost et Delphine Machy
du
Lycée Alfred Kastler de Cergy-Pontoise

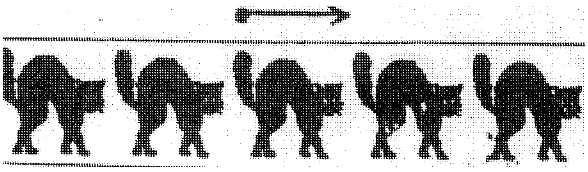
enseignantes : Mmes Annick Boisseau, Anne Kérharo et Annie Soismier.

chercheur : Mme Michèle Vergne, Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure.

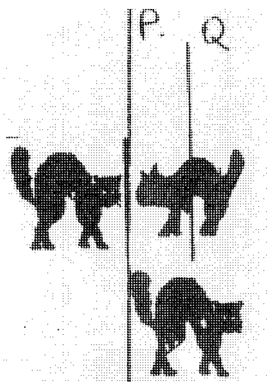
les frises

OBJECTIF : on cherche toutes les transformations possibles du plan afin de reproduire un même dessin à l'infini. Nous étudierons, tout d'abord, les frises.

1.— Dessin de base n'ayant pas de symétrie

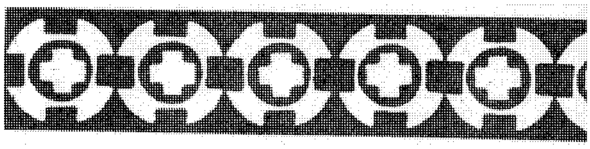


Il n'existe qu'une transformation possible : la translation qui est engendrée par deux symétries axiales.



<u>Loi de Antoine 2</u>
Pour vérifier une division, on peut multiplier le diviseur par le quotient et ajouter le reste. Le résultat doit être égal au dividende.
La loi fonctionne à deux conditions :
1) la division est juste
2) le reste est plus petit que le diviseur.

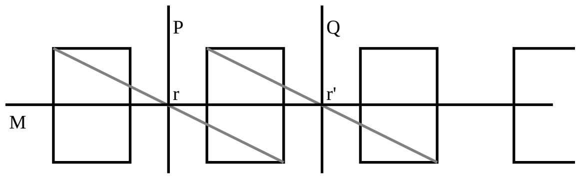
2.— Dessin de base présentant des symétries



En effet, il existe deux symétries dans le dessin de base :

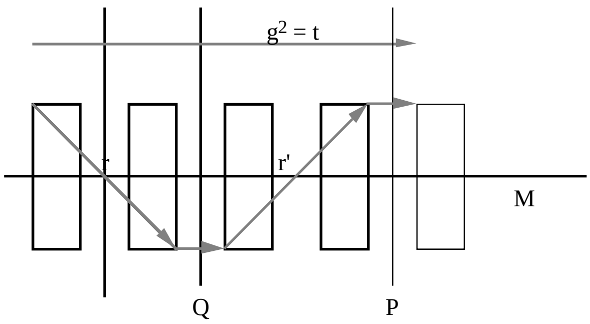
— une symétrie axiale, d'axe médian (horizontale) ;

— une symétrie axiale (verticale).



	P	Q	M
P	$P^2 = I$	$PQ = t$	$PM = r$
Q	$QP = t$	$Q^2 = I$	$QM = r'$
M	$MP = r$	$MQ = r'$	$M^2 = I$

<u>Remarque :</u> $r^2 = I$, $r'^2 = I$, et $rr' = t$:



On construit g grâce à la composée de r (= PM) et P (axe de symétrie)

	r	P	g
r	$r^2 = I$	$rP = g$	$rg = P$
P	$Pr = g$	$P^2 = I$	$Pg = r$
g	$gr = P$	$gP = r$	$g^2 = t$

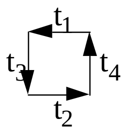
CONCLUSION : ***Toutes les frises sont obtenues à partir d'isométries.***

*(**isométries ?** Ce sont toutes les transformations qui conservent les distances :*
— translation ;
— les symétries ;
— rotation ;
— identité.)

les pavages

I.— Le carré.

Objectif : obtenir un pavage de carrés en essayant d'utiliser le minimum de transformations à partir d'un carré de départ.

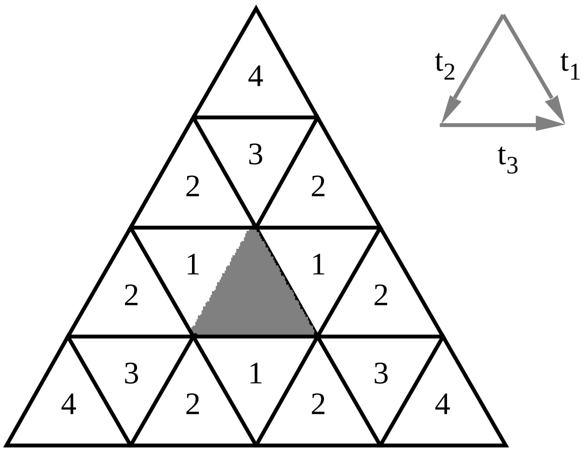


5	4	3	4	5
4	2	1	2	4
3	1		1	3
4	2	1	2	4
5	4	3	4	5

1 : t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ;
2 : $t_1 \circ t_4$; $t_1 \circ t_3$; $t_2 \circ t_4$; $t_2 \circ t_3$;
3 : t_1^2 ; t_2^2 ; t_3^2 ; t_4^2 ;
4 : $t_3^2 \circ t_2$; $t_3^2 \circ t_1$; $t_1^2 \circ t_3$; $t_1^2 \circ t_4$;
$t_2^2 \circ t_3$; $t_2^2 \circ t_4$; $t_4^2 \circ t_1$; $t_4^2 \circ t_2$;
5 : $t_4^2 \circ t_1^2$; $t_3^2 \circ t_2^2$; $t_3^2 \circ t_1^2$; $t_2^2 \circ t_4^2$;
… etc.

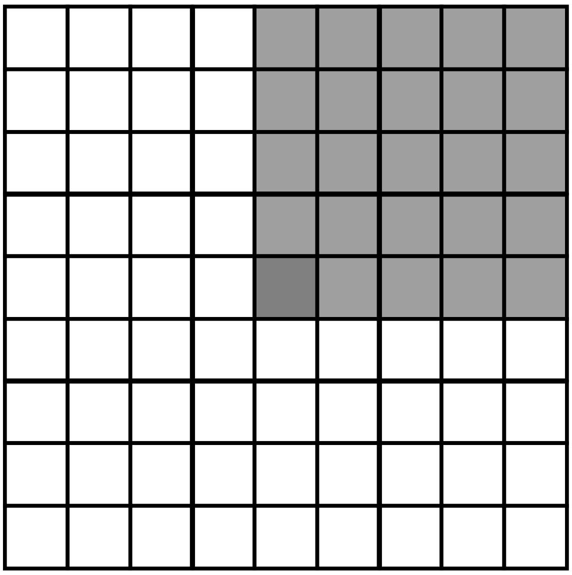
II.— Le triangle équilatéral.

OBJECTIF : identique à celui du carré.



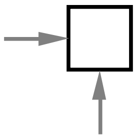
1 : symétrie axiale (S)
2 : t_1 ; $-t_1$; t_2 ; $-t_2$; $-t_3$; t_3 ;
3 : $S \circ t_1$; $S \circ t_3$; $S \circ t_2$;
4 : $t_3 \circ t_1$; $t_2 \circ (-t_3)$; $(-t_1) \circ (-t_2)$

Annexe *(réponse à une question posée par un chercheur lors d'un séminaire).*



On est situé dans le carré colorié et on veut trouver toutes les possibilités pour arriver à un carré donné en prenant le chemin le plus court (nombre de pas horizontaux et verticaux minimum à faire). On va s'intéresser à la partie hachurée puisque le résultat sera le même dans les autres parties du carré.

Dans chaque case, on indique le nombre des différents trajets possibles. Pour cela, on sait qu'on peut venir de deux endroits différents soit horizontalement, soit verticalement :



Il faut donc additionner les nombres des deux endroits différents d'où l'on peut venir. Cependant, pour trouver ces nombres, il faut partir du carré de départ :

1								
1	8							
1	7	28						
1	6	21	56					
1	5	15	35	70				
1	4	10	20	35	56			
1	3	6	10	15	21	28		
1	2	3	4	5	6	7	8	
	1	1	1	1	1	1	1	1

<u>Loi de Lou 2</u>

Si je divise un nombre par lui-même, le résultat est toujours 1.

Si N est n'importe quel nombre, sauf 0,

$$N \div N = 1$$