Espace à deux dimensions

par Hélène Huynh, Roger Fereira, Marc Hurban et Sylvain Packan
du Lycée Georges Braque d'Argenteuil.
et HocineTazibt
du Lycée Jean Jaurès d'Argenteuil

enseignants : Mmes Joëlle Richard et Christine Rouaud, M. René Veillet.

chercheur : Mme Catherine Goldstein, mathématicienne, Université Paris XI, Orsay.

Si le solide particulier qu'est l'hypercube ou encore "cube à quatre dimensions" nous a magistralement montré les difficultés auxquelles nous pourrons nous heurter dans la compréhension d'un monde à quatre dimensions, il ne nous a pas pour autant rendu la tâche plus simple quant à la connaissance d'un monde à deux dimensions.

Aussi, nous sommes-nous inspirés des deux tentatives réalisées en 1884 par Edwin A. Abbot et en 1907 par Charles Hinton pour décrire la vie dans un monde plan. Plus exactement nous avons imaginé une "machine" simple réalisable dans un tel monde et capable de l'explorer.

Présentation du monde et des figures géométriques.

Supposons qu'il existe un monde à deux dimensions. Nous souhaiterions l'explorer, et rendre en même temps cette exploration intéressante en ceci qu'elle se ferait de l'intérieur de ce monde par nous humains qui vivons dans un espace à trois dimensions. C'est pourquoi nous avons décidé de construire un robot en deux dimensions qui serait capable de déterminer différentes figures géométriques de ce monde. Ce monde est composé de quelques figures géométriques simples : carrés, rectangles, triangles, cercles et ellipses qui sont supposés fixes. Nous supposerons aussi que la mesure des côtés de chaque être à côtés rectilignes est un entier naturel.

<u>Loi de Jessy 1</u>

Avec une seule addition, il n'y a que 3 façons différentes de trouver 5 :

1 + 4   2 + 3   5 + 0

Avec une seule soustraction, il y a une infinité de solutions.

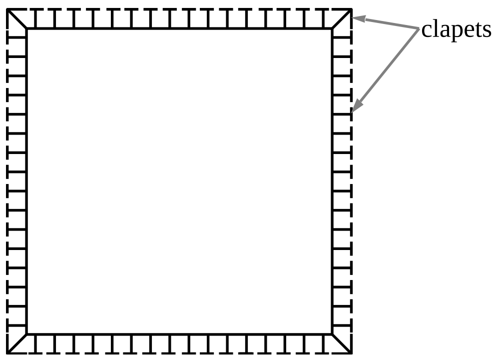
Dès que le robot sera dans ce monde, tout contact avec lui sera difficile. Il nous est donc impératif de concevoir entièrement tous les ordres que celui-ci devra exécuter pour identifier les habitants de ce monde. Les habitants ne peuvent d'ailleurs se rapprocher à plus de cinq centimètres les uns des autres. Nous prendrons cette marge de cinq centimètres pour permettre à notre robot de se déplacer aisément autour de chaque figure.

Présentation du robot.

Intéressons-nous maintenant plus précisément aux fonctions vitales et aux caractéristiques de notre robot.

Ce robot est un carré de un centimètre de côté qui pourra se faufiler aisément dans chaque recoin de ce monde. Il possède des "clapets" servant d'organes tactiles. Ceux-ci sont répartis sur tout le périmètre du carré. Il sait alors qu'il est en contact avec une figure si un ou plusieurs de ses clapets s'enfoncent.

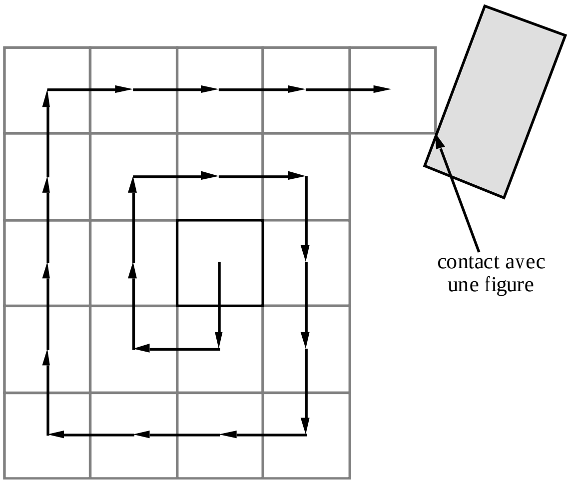
Schéma du robot (grossi 4 fois).



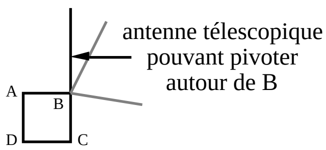
Tous ses pistons sont similaires et de très petites tailles. Notons que ce ne sont pas les dimensions en valeur absolue du robot qui sont importantes sinon le rapport de celles-ci avec celles des différentes figures du monde, et celles de ses clapets, puisqu'elles rendent compte de la possibilité qu'a le robot de se mouvoir dans le plan pour effectuer nos ordres.

Le carré se déplace en décrivant une spirale grâce à des translations (de direction parallèle à ses côtés) pour pouvoir ainsi recouvrir tout le plan et entrer en contact avec toutes les figures. Il est susceptible de faire des rotations dans le sens trigonométrique.

Schéma de la spirale de déplacement.



Le robot est doté d'une antenne télescopique (pouvant pivoter autour de B) qui sera utilisée pour reconnaître les figures courbes :



Détermination des figures.

Comment le robot va-t-il donc déterminer les figures du monde plan ?

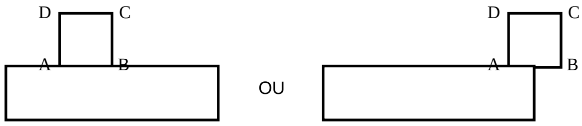
I.— Cas des figures à côtés rectilignes (carrés, triangles, rectangles).

Deux situations s'offrent au robot :

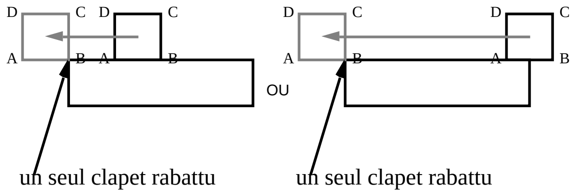
Situation A : Le robot arrive sur la figure avec au moins deux clapets rabattus.

Situation B : Le robot arrive sur la figure avec uniquement un clapet rabattu.

A : Le robot arrive sur la figure avec au moins deux clapets rabattus, c'est-à-dire : (nous prendrons ici le rectangle comme exemple de figure géométrique)



1ère étape : le robot effectue des translations de $\alpha\overrightarrow{BA}$ de telle façon qu'il n'ait plus qu'un seul clapet rabattu.



2ème étape : le robot commence sa détermination :

— Translation de $\alpha\overrightarrow{DA}$ et enregistrement de α (entier). Le robot poursuit ses translations jusqu'à n'avoir plus qu'un seul point de contact avec la figure à déterminer (cela est un ordre à toujours éxecuter).

— Translation de $\beta\,\overrightarrow{BA}$ et enregistrement de β.

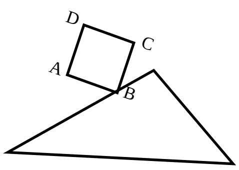
— Le robot poursuit ses translations car il pourrait encore s'agir d'un triangle rectangle. Mais une fois qu'il a effectué $\alpha\overrightarrow{AD}$ il sait alors qu'il s'agit soit d'un carré, soit d'un rectangle. En effet :

* si $\alpha = \beta$ ----> carré ;
* si $\alpha \neq \beta$ ----> rectangle.

B : Le robot arrive sur la figure avec uniquement un clapet rabattu : (nous prendrons ici le triangle comme exemple de figure géométrique à déterminer).

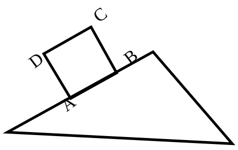
1ère étape : le robot tente une translation selon le schéma indiqué ci-dessus mais il n'y parvient pas.

Translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ impossible :



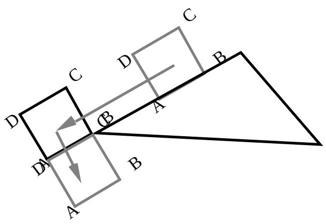
2ème étape : la translation étant impossible, le robot effectue une rotation de centre B de façon à obtenir plus d'un clapet rabattu contre la figure.

Les étapes sont alors les mêmes que celles énumérées dans le cas du rectangle.

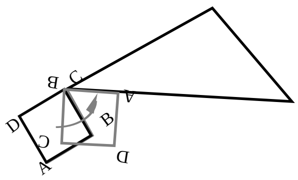


Rotation de centre B.

3ème étape : Cette dernière étape va permettre au robot de nous dire que la figure est un triangle. Lorsque le robot n'a plus que le point B en contact avec la figure, il effectue une translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$. Mais alors il n'aura toujours qu'un seul clapet rabattu au point C. Il devra donc à nouveau effectuer une rotation, cette fois autour de C pour avoir plus d'un clapet rabattu et sera donc à même de nous dire que la figure est un triangle.



Translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.



Rotation de centre C.

Pour l'étude des figures courbes dont la détermination par notre robot est à suivre (partie II), notons que nous nous sommes tout d'abord appuyés sur deux ou trois exemples à partir desquels nous avons émis une hypothèse pour éventuellement, par la suite, tenter d'en faire la démonstration. Celle-ci n'a donc pas encore été réalisée.

<u>Loi de Jamal 1</u>

Pour qu'une addition ou une soustraction ne changent pas le résultat, il faut que l'on utilise 0.

Si N est n'importe quel nombre,

$N + 0 = N$ $N - 0 = N$

II.— Cas des figures courbes.

Le robot arrive inévitablement avec un seul clapet rabattu sur la figure courbe.

1ère étape :
Il tente une translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ qui s'avère impossible.

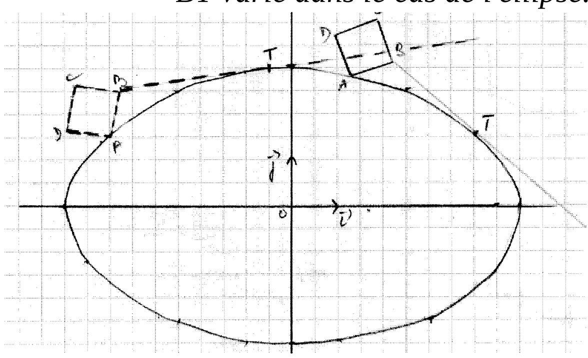
2ème étape :
Il effectue une rotation de centre A pour essayer d'avoir plus d'un clapet rabattu--> impossible : il n'y a toujours qu'un seul point de contact.

3ème étape :
Il effectue une rotation inverse pour se retrouver dans sa position initiale.

4ème étape :
Il sort son antenne téléscopique du sommet B. Elle pivote autour de B jusqu'à toucher la courbe. A ce moment le robot enregistre la longueur BT (avec T : point de tangence entre l'antenne et la courbe), puis il bloque son mécanisme de telle façon que l'angle $\angle$ ABT reste fixe.

5ème étape :
Le robot décrit la figure en conservant A en contact et avec celle-ci, l'angle $\angle$ ABT fixe et en enregistrant les différentes valeurs de la longueur BT. Si celle-ci varie, il s'agit d'une ellipse, si elle reste constante, c'est un cercle.

BT varie dans le cas de l'ellipse.



* Démontrer que BT ne varie pas dans le cas du cercle est possible à l'aide des rotations : en prenant pour centre le centre O du cercle et pour angle, un angle α quelconque.

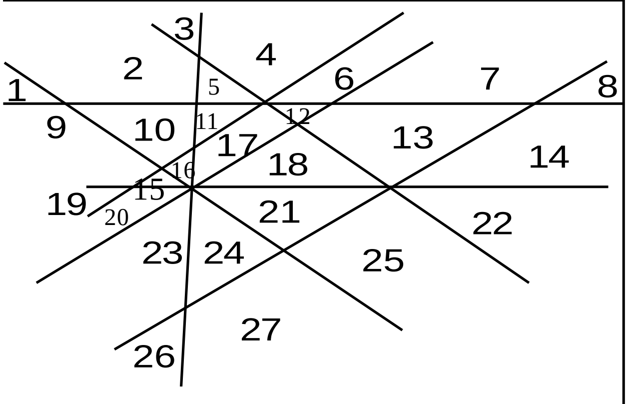
Soit $B' = r(O, \alpha)(B)$
$T' = r(O, \alpha)(T)$

on a : $OT' = OT$
$OB' = OB$
$\angle(OT', OT) = \alpha\ [2\pi]$
et $\angle(OB', OB) = \alpha\ [2\pi]$

$T'B' = TB$ car la rotation conserve les distances.

* Pour l'ellipse, nous n'avons jusqu'ici qu'une petite idée de démonstration en utilisant l'affinité transformant un cercle donné en une ellipse donnée.

NDLR : les élèves du lycée Racine ayant abandonné leur participation à “MATh.en.JEANS” en cours d'année, ceux de Georges Braque se sont retrouvés sans correspondants (dommage …). Des mathématiciens du LSD2 se sont proposés pour jouer un rôle de correspondants, et ont donc “planché” sur les sujets. Ils ont envoyé par fax les résultats de leurs cogitations, mais trop tard pour les élèves de Braque, dont le travail était déjà avancé. A titre de pistes de recherches envisageables pour les lecteurs de cette brochure, nous vous proposons ce travail du LSD2 de Grenoble.



Exemple : 8 droites

$C_1 = 4$; $C_2 = 3$; $C_3 = 3$

$P_1 = 3$; $P_2 = 2$; $P_3 = 2$

régions = 27
$= 1 + (8\text{x}9/2) - 3 - 1 - 1 - 3 - 1 - 1$

(C) (P)

Espaces à plusieurs dimensions

Comment se repérer dans un plan : deux points suffisent : 1 angle, 1 distance / deux angles (de demi-droites, comme un navire vu de deux endroits ; mais les angles doivent être différents) /deux distances (comme deux échos radar ; il faudrait rajouter un signe pour avoir tout le plan) mais les deux distances ne sont pas quelconques, elles doivent vérifier deux inégalités du “triangle”).

Trois points (non alignés) permettent de faire un repérage de la manière ordinaire avec deux axes de coordonnées. On peut aussi repérer un point du plan par les trois distances aux points de base : il y a trois nombres qui vérifient les inégalités du triangle et aussi une certaine relation que nous ne sommes pas parvenus à trouver.

Problème 1 : Trois points du plan A, B, C étant donnés, quelle relations doivent vérifier trois réels a, b, c, pour qu'il existe un point M du plan dont les distances respectives aux points A, B, C soient a, b, c ?

Le même problème (plus compliqué!) se posera si on augmente le nombre de points de base…

Si on augmente beaucoup le nombre de points de base, on peut se repérer (approximativement) par rapport aux régions que forment les droites déterminées par ces points . Un œil placé en un point du plan devrait pouvoir déterminer à peu près où il est en regardant dans quel ordre il voit les points de base. Si on imagine que des balises numérotées sont placées à tous les points de coordonnées (habituelles) entières, l'ordre dans lequel on voit ces balises permet alors de déterminer sa position !

La “dimension” (on ne sait pas très bien ce que c'est) d'un espace semble bien dépendre du moyen de repérage que l'on utilise. Dans le dernier exemple (ordre des balises) le plan est un espace de dimension 1 puisqu'il faut un seul renseignement (l'ordre) pour se repérer !

Le point de vue des “régions” nous a amené à nous intéresser au nombre de régions déterminé par n droites du plan.

Théorème : Si n droites sont vraiment quelconques (trois droites quelconques sont non concourantes et deux droites quelconques sont non parallèles) alors elles déterminent $(1+ n(n+1)/2)$ régions.

Découverte (d'après nos calculs, cette formule doit marcher pour tous les cas) : Supposons que n droites déterminent des faisceaux de c_1, c_2, c_3 … droites concourantes et des faisceaux de p_1, p_2, p_3 … droites parallèles. Alors le nombre de régions déterminées par ces droites est :
$1+ n(n+1)/2 - (c_1-1)(c_1-2)/2 - (c_2-1)(c_2-2)/2- \dots - p_1(p_1-1)/2 - p_2(p_2-1)/2 - \dots$

Souvenirs (ravivés par Pierre Duchet) du travail (autonome) d'un élève de 2de et de deux élèves de 1ère (Lycée Henri IV, 1964-1965)