Eclairement d'objets

par Aurélien Bertrand (Tle C), Stéphane Champavier (Tle C), Isabelle Rouveure (2nde) du Lycée Emmanuel Mounier de Grenoble.

enseignants : MM. Stéphane Chavaz et André Laur

chercheur : M. Charles Payan, Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de Grenoble.

Notre recherche a été divisée en deux étapes :
— la première consistait à étudier l'intensité d'éclairage d'une des faces d'un cube en fonction des coordonnées d'un point émetteur de lumière dans l'espace ;
— la deuxième visait à déterminer les zones d'ombre projetées par une figure dans le plan.

I.— Le cube et l'espace.

A l'aide d'un dé à six faces, on a montré de façon logique qu'une source lumineuse, ayant des rayons lumineux non parallèles, peut éclairer au maximum trois faces d'un cube. Un cube nécessite donc deux lampes pour pouvoir être éclairé entièrement.

On a ensuite étudié l'intensité d'éclairage du cube. On prend un cube fixe et la source lumineuse se déplaçant. On sait que l'intensité d'éclairage dépend de l'angle qui existe entre **n**, le vecteur normal à la face, et le rayon lumineux incident. Cet angle est nommé θ (voir figure 1).

On numérote les faces de 1 à 6 comme un dé. La face 6 est au-dessus et la face 1 est au-dessous. On prend un repère (D ; **i**, **j**, k), D étant l'origine du repère (voir figure 2). On pose x, y, z les coordonnées du point lumière. On a trouvé six équations (une par face) :

<u>Loi de Sabrina P 1</u>
On utilise 180 fois le chiffre 3 si on écrit tous les nombres de 1 à 400.

de 1 à 100	20 fois
de 100 à 199	20 fois
de 200 à 299	20 fois
de 300 à 400	120 fois

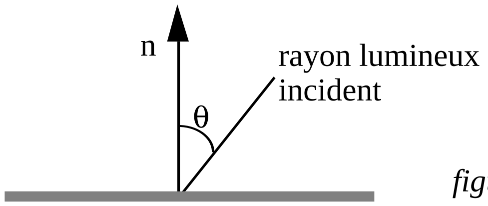


figure 1

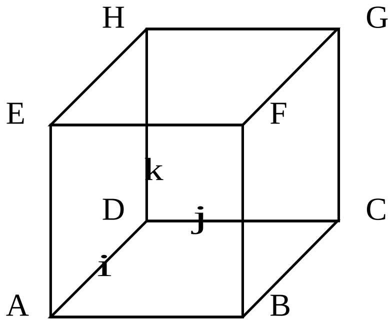


figure 2

Face 1 :

$$\cos\theta = \frac{-z}{\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+z^2}}$$

Face 2 :

$$\cos\theta = \frac{y-1}{\sqrt{(x-0.5)^2+(y-1)^2+(z-0.5)^2}}$$

Face 3 :

$$\cos\theta = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2}}$$

Face 4 :

$$\cos\theta = \frac{-x}{\sqrt{x^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2}}$$

Face 5 :

$$\cos\theta = \frac{-y}{\sqrt{(x-0.5)^2+y^2+(z-0.5)^2}}$$

Face 6 :

$$\cos\theta = \frac{z-1}{\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+(z-1)^2}}$$

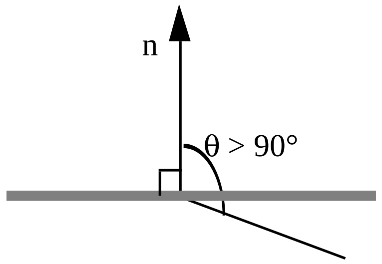


figure 3

On a pris ensuite une échelle de couleurs afin de colorier les faces du cube suivant les solutions des équations. On prend $\cos\theta > 0$ car si $\cos\theta \leq 0$, on a $\theta \geq 90°$ et la face ne sera alors pas éclairée (voir figure 3). On obtient donc diverses couleurs (on prend des dégradés de gris) :

$\cos\theta \leq 0$	$\theta \geq 90°$ couleur : NNNNN
$0 < \cos\theta < 0.342$	$90° > \theta > 70°$ couleur : NNNNB
$0.342 \leq \cos\theta < 0.642$	$70° \geq \theta > 50°$ couleur : NNNBB
$0.642 \leq \cos\theta < 0.866$	$50° \geq \theta > 30°$ couleur : NNBBB
$0.866 \leq \cos\theta < 0.984$	$30° \geq \theta > 10°$ couleur : NBBBB
$0.984 \leq \cos\theta \leq 1$	$10° \geq \theta \geq 0°$ couleur : BBBBB

[N = 1 dose de noir ; B = 1 dose de blanc]

On a ensuite construit un programme qui permet de construire le cube et de le colorier sur ordinateur (PC Goupil). L'ordinateur ne possédant pas assez de dégradés de gris, on a décidé de faire un dégradé s'étalant entre le blanc et le noir en passant par différentes nuances de bleus.

Voici la structure du programme qu'on a créé (en programmation BASIC) :

```
1Ø    entrée des 3 coordonnées du
         point lumière (x,y,z)
9Ø    GOSUB 1ØØØ

1ØØ   )
à     )     dessin du cube
19Ø   )

2ØØ   )
à     )      remplissage des faces
25Ø   )

3ØØ   )
à     )     variation de x, y et z à
35Ø   )        partir du clavier


999   GOTO 9Ø

1ØØØ  )
à     )     écriture des 6 équations
1Ø5Ø  )

11ØØ  )
à     )     attribution des couleurs
13ØØ  )

2ØØØ  RETURN
```

II.— Etude d'un carré, d'un cercle et de leurs zones d'ombre.

La deuxième partie de notre recherche nous a fait ensuite considérer un cube vu de l'avant (on ne voit donc qu'une seule face du cube) dans un repère orthonormé. Un point lumière dont les coordonnées sont variables projette des rayons lumineux sur le cube, créant ainsi une zone ombragée (voir figure 4 page suivante).

L'aire est calculée à l'aide d'un programme en BASIC en fonction de la longueur de l'arête du cube et de l'angle que fait le rayon lumineux avec l'horizontale. On arrive à calculer la longueur entre le point lumière et le sommet du cube en contact avec le rayon lumineux grâce aux coordonnées des points.

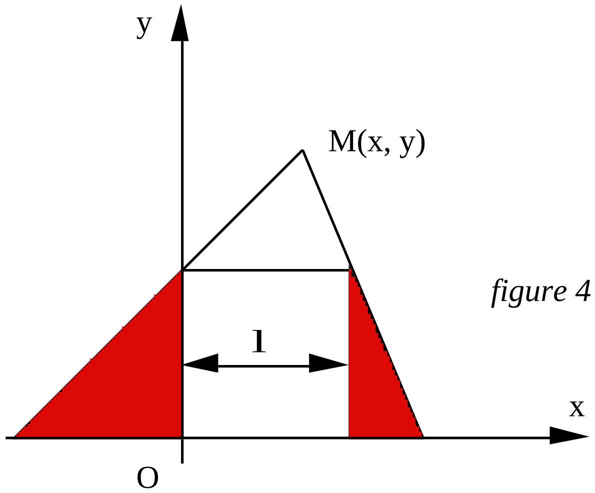


figure 4

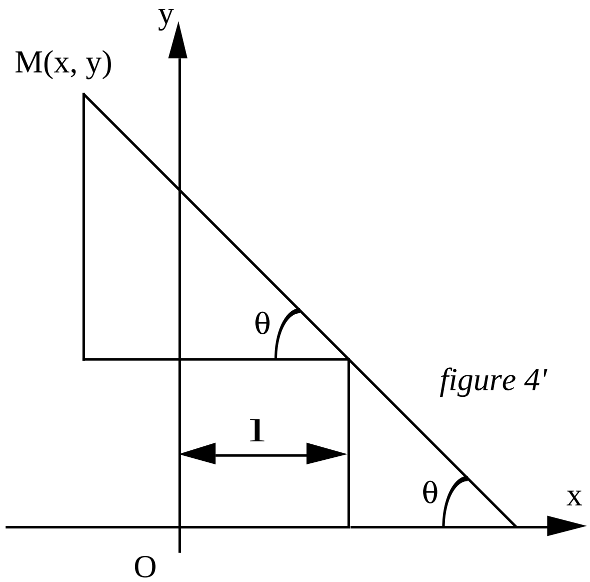


figure 4'

<u>Loi de Adrien 1</u>

Si P représente un nombre pair et I un nombre impair,

+	P	I
P	P	I
I	I	P

-	P	I
P	P	I
I	I	P

x	P	I
P	P	P
I	P	I

On ne peut pas construire un tableau de ce genre pour la division.

Ensuite, on détermine les coordonnées du point d'intersection entre la droite issue du point lumière et perpendiculaire à l'horizontale et la droite passant par l'arête supérieure du cube. Ainsi on a toutes les longueurs du triangle délimité par les points ci-dessus, par suite on trouve l'ombre (voir figure 4’).

Une autre méthode consiste à trouver une équation de la droite passant par le point lumière et le point de contact avec le cube, puis de trouver le point d'intersection avec la droite d'équation y = 0. On a ensuite la longueur entre ce point et l'arête du cube, ce qui permet de calculer l'ombre.

Nous avons ensuite travaillé sur une sphère vue de l'avant (on ne voit donc qu'un cercle). Le cercle est placé dans un repère orthonormé et on donne les coordonnées du point lumière. Nous avons déterminé deux droites issues du point lumière et tangentes au cercle. On peut, grâce au théorème de Pythagore, calculer la longueur entre le point lumière et les points de contact avec le cercle. Cette longueur est le rayon d'un nouveau cercle qui coupe le premier en deux points. Grâce à un système de deux équations (celles des deux cercles), on peut déterminer les coordonnées des points de contact entre le rayon lumineux et le cercle. Par suite, on découvre l'aire de l'ombre que projette le cercle (voir figure 5).

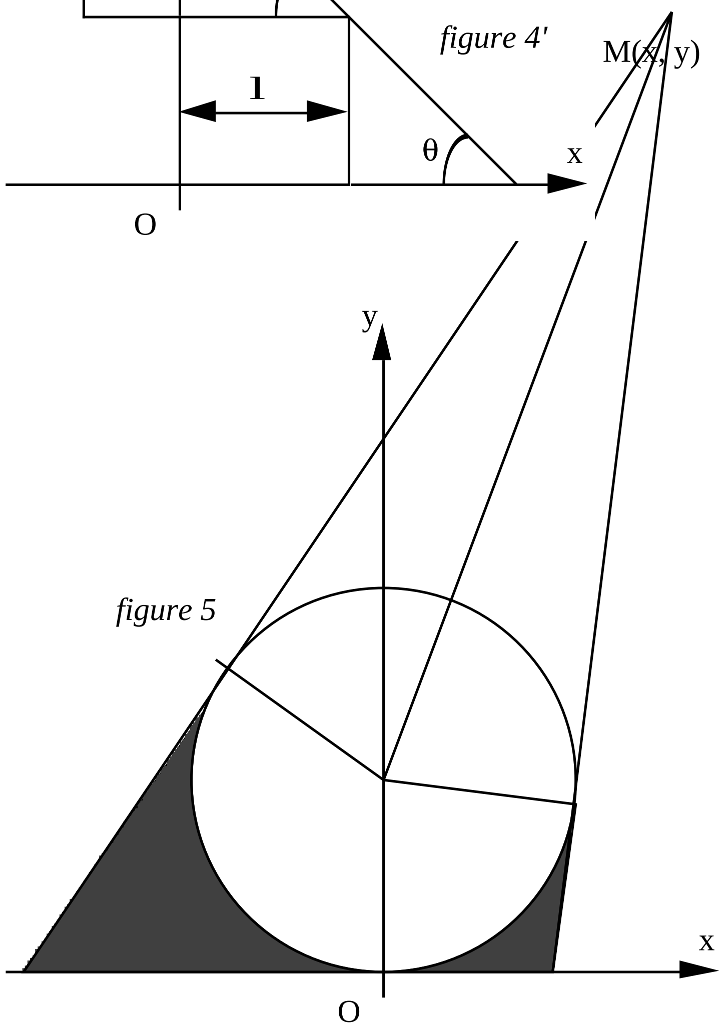
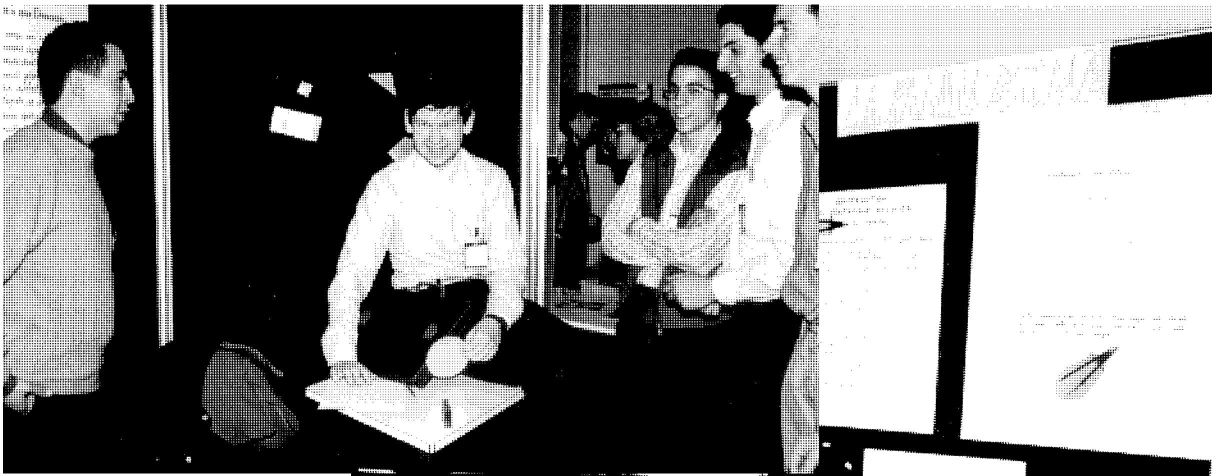


figure 5



clichés Chantal Rousselin
© Palais de la découverte.