Formules sommatoires

par ???
du Lycée Val de Seine de Grand Quevilly

enseignants : MM. Aubert, Fraynay, et Pierre Grihon

chercheur : M. Daniel Krob, Laboratoire d'Informatique de Rouen.

I— Présentation, recherche d'une formule simple.

I.1— Qu'est-ce qu'une formule sommatoire ?

Les “formules sommatoires” sont, comme leur nom l'indique, des sommes de nombres à une puisssance donnée α entière. La somme des entiers de 1 à n en est un exemple simple ($\alpha = 1$). Grâce à ces formules, on peut exprimer plus simplement une somme de nombres. Le problème général est de trouver une formule pour $\sum_{i=1}^{i=n} i^{\alpha}$.

Loi de Lou 1
Il n'y a que deux nombres qui ont la propriété suivante : $A + A = n$
$A \times A = n$
Ces nombres sont 0 et 2 :
$2 + 2 = 4$ $\quad 0 + 0 = 0$
$2 \times 2 = 4$ $\quad 0 \times 0 = 0$

I.2— Recherche de la formule pour la somme des entiers.

On a tout d'abord recherché une méthode pour calculer cette somme (étudiée en classe de première). On écrit la somme, S_1, des entiers de 1 à n dans un sens puis au dessous dans l'autre sens et on ajoute membre à membre.

$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n$
$S_1 = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1$

On a alors n fois le terme (n+1). En effet :

$(n-1) + 2 = n + 1$
$(n-2) + 3 = n + 1$
$(n-3) + 4 = n + 1$
etc.

Donc, $2S_1$ est égale à n(n+1). On en déduit la somme des entiers de 1 à n qui est alors égale à : $[n(n+1)]/2$

Résultat

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = (1/2)\, n^2 + (1/2)\, n.$$

On sait que la somme des entiers, S_1, est un polynôme et on conjecture que toute somme d'entiers de 1 à n à une puissance donnée α peut s'écrire sous la forme d'un polynôme et que ce polynôme sera d'un degré supérieur à celui de la somme recherchée (car la somme des entiers, S_1, est de degré 1 et le polynôme obtenu est de degré 2).

II— Recherche des formules par la méthode des coefficients

Nous avons conjecturé au I.2 que les sommes recherchées sont des polynômes de degrés supérieurs à ceux des sommes recherchées donc pour la somme des carrés des entiers de 1 à n le polynôme serait de degré 3 et de la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d$$

On va rechercher les réels a, b, c, d, tels que, pour tout entier n on ait :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d$$

Pour trouver le polynôme qui correspond à cette somme, on remplace n par plusieurs valeurs dans l'équation ci-dessus pour obtenir un système d'équations qui permettra de trouver les coefficients a, b, c, d (ici seulement quatre équations suffisent).

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} n=1: & a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ n=2: & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 5 \\ n=3: & 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 14 \\ n=4: & 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & 30 \end{array}$$

On résout alors ce système de quatre équations et on trouve les coefficients de la somme des carrés des entiers de 1 à n (notée S_2) :

$$\begin{array}{ll} a = (1/3) - (1/6)\,d & L1 \\ b = (1/2) + d & L2 \\ c = (1/6) - (11/6)\,d & L3 \\ 64[(1/3)-(1/6)d]+16[(1/2)+d] & \\ \quad +4[(1/6)-(11/6)\,d] = 30 & L4 \end{array}$$

transformation de L4 :

$$(64/3)-(32/3)d+8+16d+(2/3)-(22/3)d=30$$

$$30 - 2d = 30$$

$$\begin{array}{ll} a = (1/3) - (1/6)\,d & L1 \\ b = (1/2) + d & L2 \\ c = (1/6) - (11/6)\,d & L3 \\ d = 0 & L4 \end{array}$$

On peut maintenant affirmer que les quatre réels recherchés dans la résolution du système sont : a=1/3, b=1/2, c=1/6, d=0. On écrit :

$$\begin{aligned} S_2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 \\ &= (1/3)\,n^3 + (1/2)\,n^2 + (1/6)\,n \end{aligned}$$

On peut appliquer cette méthode pour tous les degrés mais elle devient vite laborieuse dès qu'on atteint un degré supérieur à 5-6.

C'est pourquoi nous avons essayé de trouver une formule générale qui donnerait le résultat de la somme recherchée (de 1 à n) pour une puissance α quelconque.

III— Recherche d'une formule générale valable pour toutes les puissances

Pour trouver une formule qui est valable pour toutes les puissances, nous avons eu l'idée d'utiliser le développement par le binôme de Newton.

On notera S_α, le nombre suivant :

$$S_\alpha = 1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+4^\alpha+ \ldots +(n-1)^\alpha+n^\alpha$$

α étant un entier naturel différent de 0, S_α représente la somme des puissances α des entiers naturels de 1 à n

On développe le terme $(k+1)^\alpha - k^\alpha$ avec l'aide du binôme de Newton :

$$(k+1)^\alpha - k^\alpha = C_\alpha^0 k^\alpha + C_\alpha^1 k^{\alpha-1} + C_\alpha^2 k^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} k^1 + C_\alpha^\alpha - k^\alpha$$

On fait alors varier k de 1 à n, ce qui nous donne un système de n équations. Quand on ajoute membre à membre ces n équations, on obtient une nouvelle équation. Le membre de gauche de cette nouvelle équation comporte uniquement la différence $(n+1)^\alpha - n^\alpha$, en effet on peut voir que lors des additions, des termes s'éliminent :

k=1 : $\mathbf{(1+1)}^\alpha - 1^\alpha =$

$$C_\alpha^0 1^\alpha + C_\alpha^1 1^{\alpha-1} + C_\alpha^2 1^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} 1^1 + C_\alpha^\alpha - 1^\alpha$$

k=2 : $(2+1)^\alpha - \mathbf{2}^\alpha =$

$$C_\alpha^0 2^\alpha + C_\alpha^1 2^{\alpha-1} + C_\alpha^2 2^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} 2^1 + C_\alpha^\alpha - 2^\alpha$$

k=3 : $(3+1)^\alpha - 3^\alpha =$

$$C_\alpha^0 3^\alpha + C_\alpha^1 3^{\alpha-1} + C_\alpha^2 3^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} 3^1 + C_\alpha^\alpha - 3^\alpha$$

…

$$\begin{aligned} k=n-1: (n-1+1)^\alpha-(n-1)^\alpha &= C_\alpha^0(n-1)^\alpha + C_\alpha^1(n-1)^{\alpha-1} \\ &+ C_\alpha^2(n-1)^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1}(n-1)^1 + C_\alpha^\alpha - (n-1)^\alpha \end{aligned}$$

k=n : $(n+1)^\alpha - n^\alpha =$

$$C_\alpha^0 n^\alpha + C_\alpha^1 n^{\alpha-1} + C_\alpha^2 n^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} n^1 + C_\alpha^\alpha - n^\alpha$$

Dans le membre de droite de la nouvelle équation obtenue, après addition, on voit par contre apparaître différentes sommes qui sont : S_α, $S_{\alpha-1}$, $S_{\alpha-2}$, … , affectées de coefficients binomiaux. On trouve :

$(n+1)^\alpha - 1^\alpha =$
$C_\alpha^0 S_\alpha + C_\alpha^1 S_{\alpha-1} + C_\alpha^2 S_{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} S_1 + C_\alpha^\alpha S_0 - S_\alpha$

$(n+1)^\alpha - 1^\alpha =$
$C_\alpha^0 S_\alpha + C_\alpha^1 S_{\alpha-1} + C_\alpha^2 S_{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} S_1 + C_\alpha^\alpha S_0 - S_\alpha$

$(n+1)^\alpha - 1 =$
$C_\alpha^1 S_{\alpha-1} + C_\alpha^2 S_{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} S_1 + C_\alpha^\alpha S_0$

$(n+1)^\alpha - 1 = C_\alpha^1 S_{\alpha-1} + C_\alpha^2 S_{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} S_1 + n$

On peut ainsi exprimer la somme $S_{\alpha-1}$ en fonction de toutes les autres sommes précédentes, $S_{\alpha-2}$, $S_{\alpha-3}$, …

$S_{\alpha-1} = [(n+1)^\alpha - (n+1) - (C_\alpha^2 S_{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} S_1)] / C_\alpha^1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha-1} = \frac{(n+1)^\alpha - (n+1) - \left(C_\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{n} i\right)}{C_\alpha^1}$$

IV— Les formules sommatoires sont des polynômes

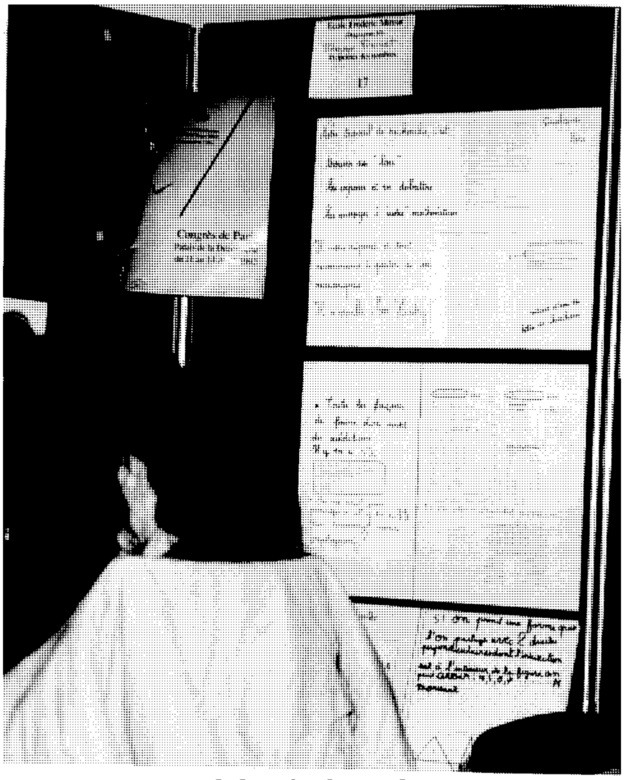
On a conjecturé précédemment que les formules sommatoires étaient des polynômes et on le démontre maintenant avec la formule générale.

Dans la formule générale, on peut voir que la somme des carrés dépend de la somme des entiers et de coefficients. Au I.2, on a montré que la somme des entiers de 1 à n est un polynôme donc la somme des carrés est un polynôme. De proche en proche, on montre alors que la somme des entiers à une même puissance quelconque est un polynôme. L'inconvénient de cette méthode est que la somme d'une puissance dépend des sommes précédentes.

Les calculs sont donc assez longs.

<u>Loi de Hanane 1</u>

Les nombres ne s'arrêtent jamais parce qu'on peut toujours rajouter un chiffre à l'écriture de ce nombre.



Le stand des écoliers de Draguignan.

NDLR
remarques sur la formule du binôme …

calcul des coefficients binomiaux :

$$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-\beta+1)}{\beta\,(\beta-1)\,(\beta-2)\,\ldots\,(\beta-\beta+1)}$$

formule du binôme de Newton : elle concerne le développement de $(a+b)^n$; elle n'est utilisée ici que dans le cas de $(k+1)^\alpha$:

$(k+1)^\alpha$
$= C_\alpha^0 k^\alpha + C_\alpha^1 k^{\alpha-1} + C_\alpha^2 k^{\alpha-2} + \ldots + C_\alpha^{\alpha-1} k^1 + C_\alpha^\alpha$