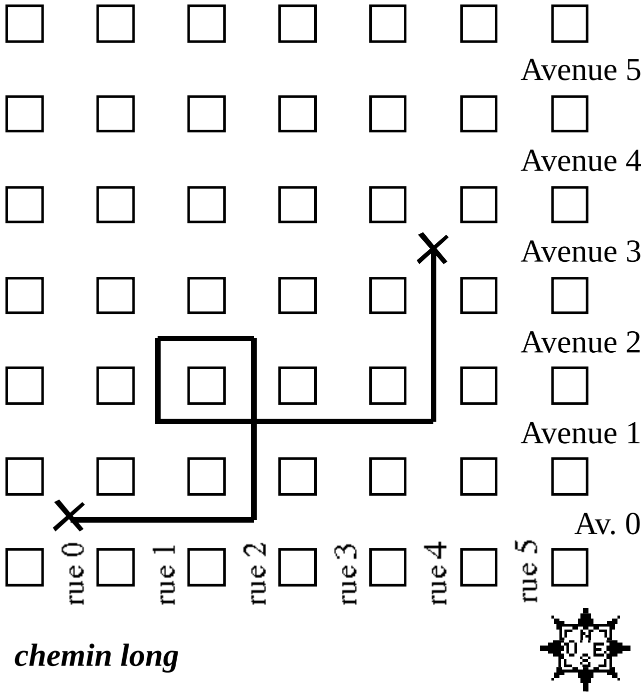
labyrinthes ou cheminement dans New-York



chemin long

Collège Victor Hugo, rue Elsa Triolet,
93160 Noisy-le-Grand
Collège l'Arche Guédon, 77200 Torcy

les chemins les plus courts

Je suis au carrefour (0 ; 0). Je veux rejoindre quelqu'un au carrefour (4 ; 3). Je dois trouver le nombre de chemins (les plus courts possibles) pour rejoindre cette personne. Nous avons remarqué que nous devions suivre quatre fois la direction de l'Est et trois fois la direction du Nord. Donc pour connaître le nombre de chemins les plus courts possibles pour voyager entre ces deux points, il nous faut trouver toutes les façons de combiner quatre Est et trois Nord.

Le point (4 ; 3) étant situé en haut à droite, nous devons suivre les directions Nord et Est car si nous nous dirigeons vers le bas ou vers la gauche cela rallonge le chemin.

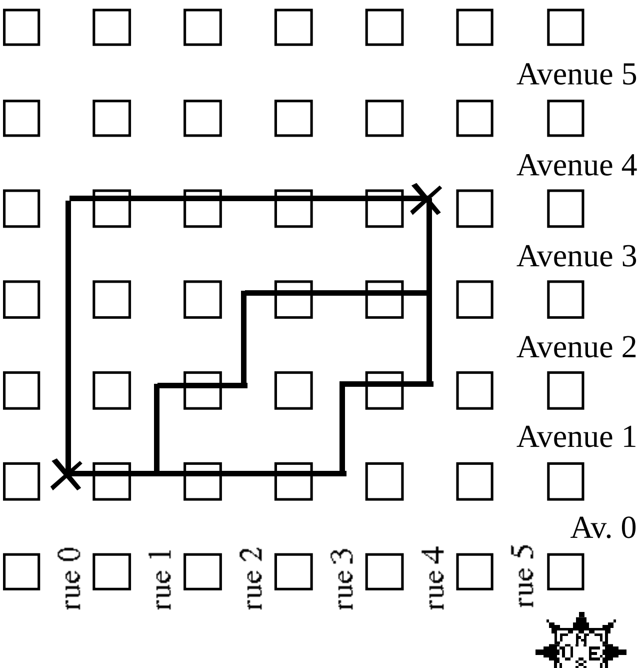
Exemple : Nous sommes au carrefour (0 ; 0), nous devons nous rendre au carrefour (4 ; 3). Les chemins à suivre seront de quatre Est et de trois Nord. Si au bout de quelques pavés nous allons en direction du Sud ou de l'Ouest nous serons obligés d'ajouter le nombre de Sud ou d'Ouest aux longueurs précédentes. Une fois arrivés au carrefour (2 ; 2) si nous allons vers le carrefour (1 ; 1) nous devons ajouter aux directions précédentes un Sud et un Ouest.

Donc nous constatons que nous n'aurons que deux directions à suivre, ces directions représentant le positionnement du point où nous devons nous rendre.

Si le point d'arrivée est plus au Nord et à l'Est que le point de départ, alors on n'utilise que les directions du Nord et de l'Est. Si le point d'arrivée est plus au Sud et à l'Ouest que le point de départ, alors on n'utilise que les directions de Sud et de l'Ouest.

Exemple : Nous sommes au point (0 ; 0), nous devons nous rendre au carrefour (4 ; 3). Pour trouver la longueur des chemins les plus courts, nous faisons la somme des numéros des rues et des avenues où nous devons nous rendre : $4 + 3 = 7$.

les chemins les plus courts

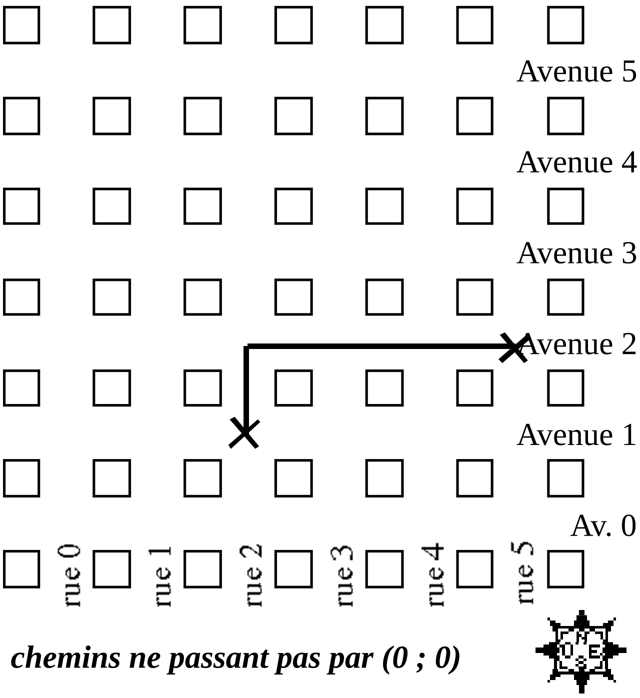


Donc la longueur des chemins les plus courts est de 7 pavés.

Dans le cas où nous ne sommes pas au carrefour (0 ; 0) : nous faisons la somme de chacun des points (de départ et d'arrivée). Ensuite nous soustrayons le nombre le plus petit au plus grand.

Non. Exemple : de (3 ; 1) à (2 ; 3)

[illegible] 1), no[illegible] carrefour (5 ; 2). No[illegible]ions les nombres du carrefour de départ : 2 + 1 = 3. Puis, nous additionnons les nombres du carrefour d'arrivée : 5 + 2 = 7. Ensuite nous soustrayons le nombre le plus



chemins ne passant pas par (0 ; 0)

petit, ainsi obtenu, au plus grand : 7 - 3 = 4. Donc la longueur des chemins les plus courts est de 4 pavés.

Cette méthode est efficace dans tous les cas de figure possibles. Pour trouver les chemins les plus courts, il faut se limiter à certains périmètres. Le périmètre est un rectangle dont les deux angles opposés sont le point de départ et le point d'arrivée.

Nombre de chemins possibles.

Nous avons eu l'idée de combiner des lettres quand nous avons cherché le nombre de possibilités pour combiner les directions Est et Nord.

D'abord nous avons cherché le nombre de "mots" possibles que l'on peut écrire avec un nombre donné de lettres différentes.

Exemple : Pour un "mot" à quatre lettres différentes, on prend le nombre total de lettres qui est quatre. Lorsque une lettre est placée, il ne reste que trois lettres, donc on multiplie 4 par 3. Lorsque deux lettres sont placées on fait 4 x 3 x 2 et lorsque trois lettres sont placées on multiplie par le nombre de lettres qui restent, donc 1 :

ABCD 4 x 3 x 2 x 1.

Donc pour un "mot" à n lettres, c'est égal à n x nombre de possibilités d'un mot à (n - 1) lettres. On a : n x (n - 1) x nombre de possibilités à (n - 2) lettres … c'est-à-dire

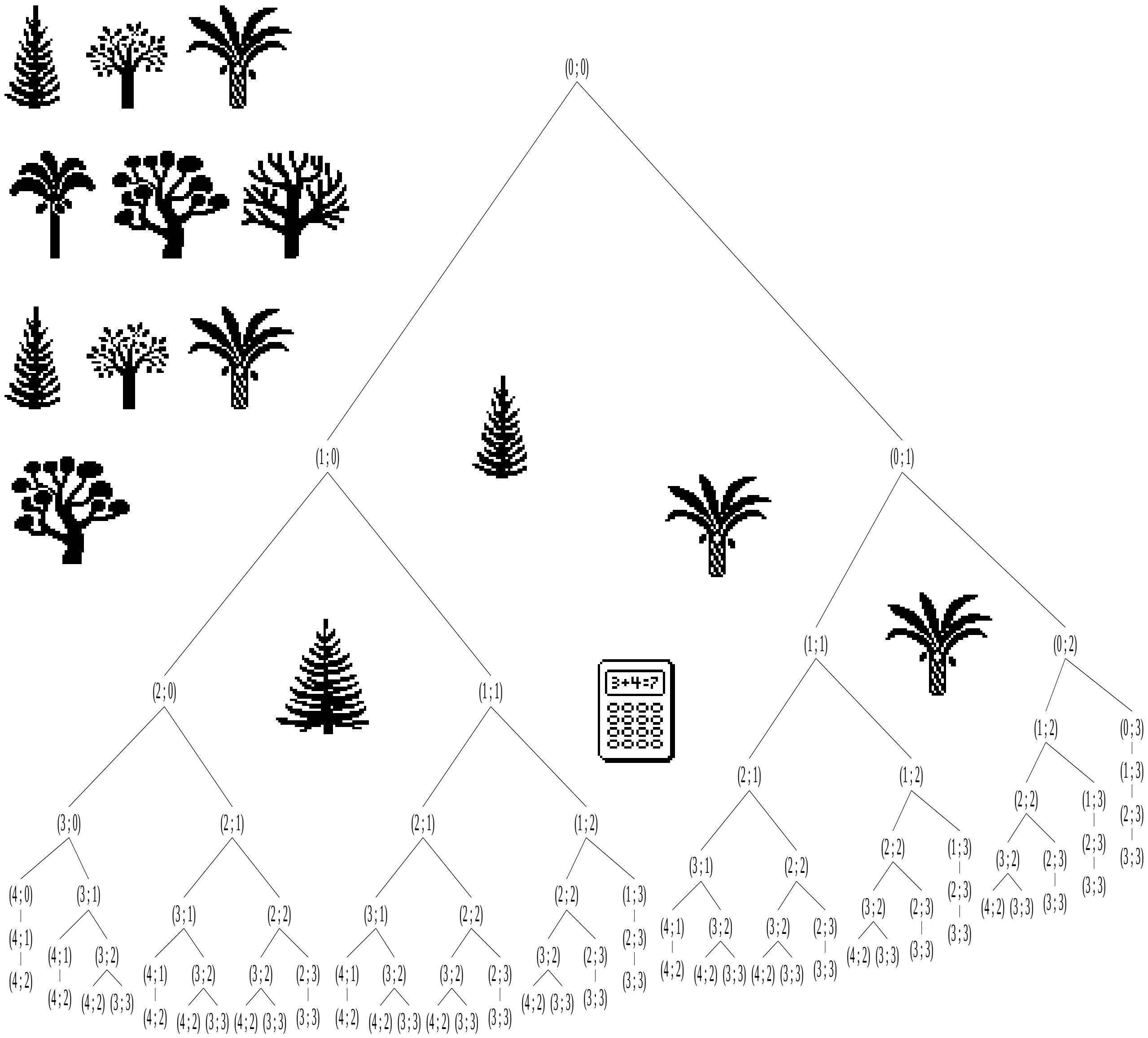
n x (n - 1) x (n - 2) … 4 … 1.

Pour un mot à 4 lettres, cela donne :
4 x 3 x 2 x 1 = 24.

Mais pour notre problème on utilise deux lettres (E et N) seulement, parce qu'il n'y a que deux directions qui sont prises en compte.

Donc nous avons cherché le nombre de"mots" possibles que l'on peut écrire avec un nombre donné de lettres dont certaines sont identiques.

Nous avons aussi construit des "arbres" qui nous ont permis de voir certaines de nos erreurs.



On a travaillé sur des exemples numériques. Exemple : on prend un "mot" à six lettres différentes, pour trouver le nombre de possibilités d'écrire ce "mot", il faut faire la première formule. On obtient 720 possibilités.

Si dans un "mot" à six lettres on a quatre lettres identiques et deux lettres identiques, on utilise la première formule :

pour quatre lettres identiques : 4x3x2x1 = 24

pour deux lettres identiques : 2x1 = 2

on multiplie le résultat des quatre lettres identiques (24) par le résultat des deux lettres identiques (2) : 24x2 = 48

puis on divise 720 (nombre de possibilités de six lettres différentes) par 48. On obtient alors le nombre de possibilités d'écrire un "mot" de six lettres avec quatre lettres identiques et deux lettres identiques.

On a constaté sur d'autres exemples que cette méthode convenait. On a alors pensé à écrire une formule plus générale. Pour l'instant, nous ne l'avons pas démontrée. Pour former un "mot" à n lettres avec q lettres identiques et p lettres identiques, le nombre de mots est donc :

$$\boxed{\frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots 4 \times 3 \times 2 \times 1}{q \times (q - 1) \dots \times 1 \times p \times (p - 1) \dots \times 1}}$$

Donc pour notre problème de New-York : on doit former un “mot” à sept lettres avec quatre lettres identiques et trois lettres identiques. On a donc :

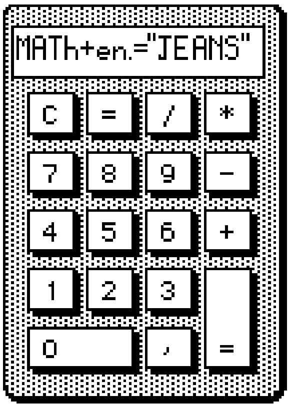
le nombre de “mots” à sept lettres différentes est 7x6x5x4x3x2x1 = 5040

le nombre de “mots” à quatre lettres différentes est 4x3x2x1 = 24

le nombre de “mots” à trois lettres différentes est 3x2x1 = 6.

Donc le nombre de chemins les plus courts, pour aller de (0 ; 0) à (4 ; 3) est :

$$N = \frac{5\,040}{24 \times 6} = \frac{5\,040}{144} = 35.$$



Conclusion

Nous avons trouvé le nombre de chemins du carrefour (0 ; 0) à (4 ; 3) ; donc, en appliquant le même principe, on peut trouver le nombre de chemins entre deux carrefours quelconques.

Mais ce n'est pas le seul problème auquel nous nous sommes intéressés : entre autres, nous avons essayé de comprendre un problème concernant une loterie. Nous avons alors remarqué que nos méthodes de recherches étaient valables et identiques à celles du cheminement dans New-York.

D'autre part comment sortir d'un labyrinthe a été un de nos autres problèmes dont nous pensons avoir trouvé une solution possible.