les nombres

Collège Victor Hugo, rue Elsa Triolet,
93160 Noisy-le-Grand
Collège l'Arche Guédon, 77200 Torcy

Nous avons choisi *les nombres* comme sujet de recherche. Parmi tous nos sujets traités, nous avons choisi de vous présenter *certains critères de divisibilité* et *les nombres premiers.*
Pour commencer, nous allons vous exposer les critères de divisibilité qui nous ont été utiles pour trouver les nombres premiers.

Dans l'ordre croissant, nous avons tout d'abord 2. Tous les nombres se terminant par 0, 2, 4, 6, 8 sont divisibles par 2, car le reste de la division par 2 est égal à 0.

Exemples : 1327 ne se termine pas par un chiffre pair ; 146 se termine par un chiffre pair, donc est divisible par 2.

Nous avons ensuite 3. Tout nombre dont la somme des chiffres est un multiple de 3 est divisible par 3, car le reste de la division par 3 est égal à 0.

Exemples : 154 : 1 + 5 + 4 = 10 n'est pas divisible par 3 ; 135 : 1 + 3 + 5 = 9 est divisible par 3.

Puis 5. Tous les nombres se terminant par 5 ou 0 sont divisibles par 5, car le reste de la division est égal à 0.

Exemples : 49 ne se termine ni par 5 ni par 0 75 se termine par 5 donc est divisible par 5.

Nous continuons par 10, 100, 1000 … Il faut que le nombre ait autant de zéros que son diviseur pour que le reste de la division soit égal à 0. Exemples : 7950 : 100 = 79,5 impossible ; 7800 : 100 = 78 possible.

Ces critères de divisibilité nous ont aidés à trouver les nombres premiers.

[NDLR : ce sont bien des critères, conditions nécessaires et suffisantes.]

Les nombres premiers sont des nombres qui ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes. Pour trouver ces nombres premiers, nous avons une méthode qui consiste à diviser le nombre donné par les autres nombres premiers le précédant, inférieurs à sa moitié.

Pourquoi à sa moitié ? Parce que si un nombre est divisé par un autre plus grand que sa moitié, le résultat sera supérieur à 1 et inférieur à 2. Exemples : 323 : 2 = 161,5
323 : 247 ≈ 1,31

Il n'y a pas de nombre entier entre 1 et 2 ; 1 est le résultat du nombre divisé par lui-même :
323 : 323 = 1

Et 2 est le résultat du nombre divisé par sa moitié :

$$323 \times \frac{2}{323} = 2$$

Donc, diviser un nombre par un autre supérieur à sa moitié ne sert à rien.

Pour trouver un nombre premier, nous faisons :

31 : 1 = 31
31 : 2 = 15,5
31 : 3 ≈ 10,3
31 : 5 = 6,2
…
31 : 13 ≈ 2,3

Remarque : étant donné que la multiplication est commutative, pour trouver tous les diviseurs d'un nombre *y*, il n'est pas utile de chercher au dessus de la racine carrée du nombre *y*.

Notre idée était de savoir si il y avait des nombres premiers jusqu'à l'infini ; nous avons donc barré tous les multiples de 2 qui se trouvent en colonne ; puis les multiples de 3 ; ensuite ceux de 5 qui se retrouvent également en colonne ; etc …

D'après notre tableau, les nombres premiers ne se retrouvent pas à intervalles réguliers.

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~	**11**	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~	**31**	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~	**71**	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	**103**	~~104~~	~~105~~	~~106~~	**107**	~~108~~	**109**	~~110~~	~~111~~	~~112~~	**113**	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	**127**	~~128~~	~~129~~	~~130~~	**131**	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	**137**	~~138~~	**139**	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	**149**	~~150~~	**151**	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	**157**	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	**163**	~~164~~	~~165~~	~~166~~	**167**	~~168~~	~~169~~	~~170~~	~~171~~	~~172~~	**173**	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	**179**	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~	**191**	~~192~~	**193**	~~194~~	~~195~~	~~196~~	**197**	~~198~~	**199**	~~200~~
~~201~~	~~202~~	~~203~~	~~204~~	~~205~~	~~206~~	~~207~~	~~208~~	~~209~~	~~210~~	**211**	~~212~~	~~213~~	~~214~~	~~215~~	~~216~~	~~217~~	~~218~~	~~219~~	~~220~~
~~221~~	~~222~~	**223**	~~224~~	~~225~~	~~226~~	**227**	~~228~~	**229**	~~230~~	~~231~~	~~232~~	**233**	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~	**239**	~~240~~
241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	~~247~~	~~248~~	~~249~~	~~250~~	**251**	~~252~~	~~253~~	~~254~~	~~255~~	~~256~~	**257**	~~258~~	~~259~~	~~260~~
~~261~~	~~262~~	**263**	~~264~~	~~265~~	~~266~~	~~267~~	~~268~~	**269**	~~270~~	**271**	~~272~~	~~273~~	~~274~~	~~275~~	~~276~~	**277**	~~278~~	~~279~~	~~280~~
281	~~282~~	**283**	~~284~~	~~285~~	~~286~~	~~287~~	~~288~~	~~289~~	~~290~~	~~291~~	~~292~~	**293**	~~294~~	~~295~~	~~296~~	~~297~~	~~298~~	~~299~~	~~300~~
~~301~~	~~302~~	~~303~~	~~304~~	~~305~~	~~306~~	**307**	~~308~~	~~309~~	~~310~~	**311**	~~312~~	**313**	~~314~~	~~315~~	~~316~~	**317**	~~318~~	~~319~~	~~320~~
~~321~~	~~322~~	~~323~~	~~324~~	~~325~~	~~326~~	~~327~~	~~328~~	~~329~~	~~330~~	**331**	~~332~~	~~333~~	~~334~~	~~335~~	~~336~~	**337**	~~338~~	~~339~~	~~340~~
~~341~~	~~342~~	~~343~~	~~344~~	~~345~~	~~346~~	**347**	~~348~~	**349**	~~350~~	~~351~~	~~352~~	**353**	~~354~~	~~355~~	~~356~~	~~357~~	~~358~~	**359**	~~360~~
~~361~~	~~362~~	~~363~~	~~364~~	~~365~~	~~366~~	**367**	~~368~~	~~369~~	~~370~~	~~371~~	~~372~~	**373**	~~374~~	~~375~~	~~376~~	~~377~~	~~378~~	**379**	~~380~~
~~381~~	~~382~~	**383**	~~384~~	~~385~~	~~386~~	~~387~~	~~388~~	**389**	~~390~~	~~391~~	~~392~~	~~393~~	~~394~~	~~395~~	~~396~~	**397**	~~398~~	~~399~~	~~400~~
401	~~402~~	~~403~~	~~404~~	~~405~~	~~406~~	~~407~~	~~408~~	**409**	~~410~~	~~411~~	~~412~~	~~413~~	~~414~~	~~415~~	~~416~~	~~417~~	~~418~~	**419**	~~420~~
421	~~422~~	~~423~~	~~424~~	~~425~~	~~426~~	~~427~~	~~428~~	~~429~~	~~430~~	**431**	~~432~~	**433**	~~434~~	~~435~~	~~436~~	~~437~~	~~438~~	**439**	~~440~~
~~441~~	~~442~~	**443**	~~444~~	~~445~~	~~446~~	~~447~~	~~448~~	**449**	~~450~~	~~451~~	~~452~~	~~453~~	~~454~~	~~455~~	~~456~~	**457**	~~458~~	~~459~~	~~460~~
461	~~462~~	**463**	~~464~~	~~465~~	~~466~~	**467**	~~468~~	~~469~~	~~470~~	~~471~~	~~472~~	~~473~~	~~474~~	~~475~~	~~476~~	~~477~~	~~478~~	**479**	~~480~~
~~481~~	~~482~~	~~483~~	~~484~~	~~485~~	~~486~~	**487**	~~488~~	~~489~~	~~490~~	**491**	~~492~~	~~493~~	~~494~~	~~495~~	~~496~~	~~497~~	~~498~~	**499**	~~500~~
~~501~~	~~502~~	**503**	~~504~~	~~505~~	~~506~~	~~507~~	~~508~~	**509**	~~510~~	~~511~~	~~512~~	~~513~~	~~514~~	~~515~~	~~516~~	~~517~~	~~518~~	~~519~~	~~520~~
521	~~522~~	**523**	~~524~~	~~525~~	~~526~~	~~527~~	~~528~~	~~529~~	~~530~~	~~531~~	~~532~~	~~533~~	~~534~~	~~535~~	~~536~~	~~537~~	~~538~~	~~539~~	~~540~~
541	~~542~~	~~543~~	~~544~~	~~545~~	~~546~~	**547**	~~548~~	~~549~~	~~550~~	~~551~~	~~552~~	~~553~~	~~554~~	~~555~~	~~556~~	**557**	~~558~~	~~559~~	~~560~~
~~561~~	~~562~~	**563**	~~564~~	~~565~~	~~566~~	~~567~~	~~568~~	**569**	~~570~~	**571**	~~572~~	~~573~~	~~574~~	~~575~~	~~576~~	**577**	~~578~~	~~579~~	~~580~~
~~581~~	~~582~~	~~583~~	~~584~~	~~585~~	~~586~~	**587**	~~588~~	~~589~~	~~590~~	~~591~~	~~592~~	**593**	~~594~~	~~595~~	~~596~~	~~597~~	~~598~~	**599**	~~600~~
601	~~602~~	~~603~~	~~604~~	~~605~~	~~606~~	**607**	~~608~~	~~609~~	~~610~~	~~611~~	~~612~~	**613**	~~614~~	~~615~~	~~616~~	**617**	~~618~~	**619**	~~620~~
~~621~~	~~622~~	~~623~~	~~624~~	~~625~~	~~626~~	~~627~~	~~628~~	~~629~~	~~630~~	**631**	~~632~~	~~633~~	~~634~~	~~635~~	~~636~~	~~637~~	~~638~~	~~639~~	~~640~~
641	~~642~~	**643**	~~644~~	~~645~~	~~646~~	**647**	~~648~~	~~649~~	~~650~~	~~651~~	~~652~~	**653**	~~654~~	~~655~~	~~656~~	~~657~~	~~658~~	**659**	~~660~~
661	~~662~~	~~663~~	~~664~~	~~665~~	~~666~~	~~667~~	~~668~~	~~669~~	~~670~~	~~671~~	~~672~~	**673**	~~674~~	~~675~~	~~676~~	**677**	~~678~~	~~679~~	~~680~~
~~681~~	~~682~~	**683**	~~684~~	~~685~~	~~686~~	~~687~~	~~688~~	~~689~~	~~690~~	**691**	~~692~~	~~693~~	~~694~~	~~695~~	~~696~~	~~697~~	~~698~~	~~699~~	~~700~~
701	~~702~~	~~703~~	~~704~~	~~705~~	~~706~~	~~707~~	~~708~~	**709**	~~710~~	~~711~~	~~712~~	~~713~~	~~714~~	~~715~~	~~716~~	~~717~~	~~718~~	**719**	~~720~~
~~721~~	~~722~~	~~723~~	~~724~~	~~725~~	~~726~~	**727**	~~728~~	~~729~~	~~730~~	~~731~~	~~732~~	**733**	~~734~~	~~735~~	~~736~~	~~737~~	~~738~~	**739**	~~740~~
~~741~~	~~742~~	**743**	~~744~~	~~745~~	~~746~~	~~747~~	~~748~~	~~749~~	~~750~~	**751**	~~752~~	~~753~~	~~754~~	~~755~~	~~756~~	**757**	~~758~~	~~759~~	~~760~~
761	~~762~~	~~763~~	~~764~~	~~765~~	~~766~~	~~767~~	~~768~~	**769**	~~770~~	~~771~~	~~772~~	**773**	~~774~~	~~775~~	~~776~~	~~777~~	~~778~~	~~779~~	~~780~~
~~781~~	~~782~~	~~783~~	~~784~~	~~785~~	~~786~~	**787**	~~788~~	~~789~~	~~790~~	~~791~~	~~792~~	~~793~~	~~794~~	~~795~~	~~796~~	**797**	~~798~~	~~799~~	~~800~~
~~801~~	~~802~~	~~803~~	~~804~~	~~805~~	~~806~~	~~807~~	~~808~~	**809**	~~810~~	**811**	~~812~~	~~813~~	~~814~~	~~815~~	~~816~~	~~817~~	~~818~~	~~819~~	~~820~~
821	~~822~~	**823**	~~824~~	~~825~~	~~826~~	**827**	~~828~~	**829**	~~830~~	~~831~~	~~832~~	~~833~~	~~834~~	~~835~~	~~836~~	~~837~~	~~838~~	**839**	~~840~~
~~841~~	~~842~~	~~843~~	~~844~~	~~845~~	~~846~~	~~847~~	~~848~~	~~849~~	~~850~~	~~851~~	~~852~~	**853**	~~854~~	~~855~~	~~856~~	**857**	~~858~~	**859**	~~860~~
~~861~~	~~862~~	**863**	~~864~~	~~865~~	~~866~~	~~867~~	~~868~~	~~869~~	~~870~~	~~871~~	~~872~~	~~873~~	~~874~~	~~875~~	~~876~~	**877**	~~878~~	~~879~~	~~880~~
881	~~882~~	**883**	~~884~~	~~885~~	~~886~~	**887**	~~888~~	~~889~~	~~890~~	~~891~~	~~892~~	~~893~~	~~894~~	~~895~~	~~896~~	~~897~~	~~898~~	~~899~~	~~900~~
~~901~~	~~902~~	~~903~~	~~904~~	~~905~~	~~906~~	**907**	~~908~~	~~909~~	~~910~~	**911**	~~912~~	~~913~~	~~914~~	~~915~~	~~916~~	~~917~~	~~918~~	**919**	~~920~~
~~921~~	~~922~~	~~923~~	~~924~~	~~925~~	~~926~~	~~927~~	~~928~~	**929**	~~930~~	~~931~~	~~932~~	~~933~~	~~934~~	~~935~~	~~936~~	**937**	~~938~~	~~939~~	~~940~~
941	~~942~~	~~943~~	~~944~~	~~945~~	~~946~~	**947**	~~948~~	~~949~~	~~950~~	~~951~~	~~952~~	**953**	~~954~~	~~955~~	~~956~~	~~957~~	~~958~~	~~959~~	~~960~~
~~961~~	~~962~~	~~963~~	~~964~~	~~965~~	~~966~~	**967**	~~968~~	~~969~~	~~970~~	**971**	~~972~~	~~973~~	~~974~~	~~975~~	~~976~~	**977**	~~978~~	~~979~~	~~980~~
~~981~~	~~982~~	**983**	~~984~~	~~985~~	~~986~~	~~987~~	~~988~~	~~989~~	~~990~~	**991**	~~992~~	~~993~~	~~994~~	~~995~~	~~996~~	**997**	~~998~~	~~999~~	…

→ 0 est un nombre inclassable (il n'est pas premier, mais positif et négatif à la fois).
→ certains nombres se terminant par 3 ne sont pas premiers.
→ il n'y a, parmi les nombres premiers, que le nombre 2 que l'on puisse additionner à un autre nombre premier pour en obtenir un troisième.

Nous avons décidé d'utiliser les nombres premiers dans le concret.

Nous avons donc imaginé un pays où il n'y a que des pièces de 3 et 5 francs. Exemple : 348 :

❶ on regarde les unités : ici 8
❷ on cherche le plus petit multiple de 3 se terminant par 8 ; donc 18
❸ on soustrait 18 à 348 : 348 - 18 = 330
❹ on divise 330 par 5 : 330 : 5 = 66

Il faudra donc 66 pièces de 5 francs et 6 pièces de 3 francs.

¿ Est-ce qu'on peut payer 2 francs avec des pièces de 9 et 15 francs ?

$N - M = (9\, n_1 + 15\, m_1) - (9\, n_2 + 15\, m_2)$
$= 9\, n_1 + 15\, m_1 - 9\, n_2 - 15\, m_2$
$= 9\, (n_1 - n_2) + 15\, (m_1 - m_2)$. Ça ne pourra jamais faire 2.

Donc 26 ne pourra pas être payé avec des pièces de 15 et 9 francs.

Nombre se terminant par :	Nombre à enlever, multiple de 3 et se terminant par :	exemples :
0	multiple de 5	520 : 5 = 104
1	1 ou 6	221 - 21 = 210 … 210 : 5 = 42
2	2 ou 7	422 - 27 = 395 … 395 : 5 = 79
3	3 ou 8	583 - 18 = 565 … 565 : 5 = 113
4	4 ou 9	624 - 24 = 600 … 600 : 5 = 120
5	multiple de 5	925 : 5 = 185
6	6 ou 1	736 - 36 = 700 … 700 : 5 = 140
7	7 ou 2	157 - 27 = 130 … 130 : 5 = 26
8	8 ou 3	368 - 18 = 350 … 350 : 5 = 70
9	9 ou 4	439 - 24 = 415 … 415 : 5 = 63

Si un nombre se termine par le chiffre 1, on peut lui enlever un nombre multiple de 3, se terminant par 1 ou par 6 : pour un multiple de 3 se terminant par 1, le résultat finira par le chiffre 0 ; si c'est un multiple de 3 se terminant par 6, le résultat finira par le chiffre 5. [exemples : 21 et 6]

On a donc démontré que toutes les sommes peuvent être payées avec des pièces de 3 et 5 francs.

Pour payer une somme, il y a différentes manières de la payer. On peut enlever un multiple de 5 pour avoir un multiple de 3. Exemple : 392… 392 - 72 = 320 ; 320 : 5 = 64 ; 72 : 3 = 24. Il faudra 24 pièces de 3 francs et 64 pièces de 5 francs.

Par contre il y a des pays où on ne pourrait pas tout payer. Exemple : un pays ayant pour seule monnaie des pièces de 9 et 15 francs (qui ne sont pas des nombres premiers).

Exemple : 26 = 9 x 1 + 15 x 1 + 2.

Base 12 vs base 10

10	12
0	0
1	1
2	∧
3	Σ
4	∞
5	5
6	φ
7	ω
8	Ω
9	∇
10	∅
11	⊥

Quelques avantages :
— plus de diviseurs
— il y a un rapport avec les heures et les mois.

Quelques propriétés :
— les nombres premiers sont les mêmes qu'en base 10, il n'y a que l'écriture qui change.

base 12 ↓
∧ Σ 5 ω ⊥ 11 15 1ω …
2 3 5 7 11 13 17 19 …
base 10 ↑

— la divisibilité par 11 dans la base 12 est la même que la divisibilité par 9 dans la base 10.

Quelques démonstrations …

On a découvert qu'**un nombre moins la somme de ses chiffres est toujours égal à un multiple de 9.**

première étape : cas d'un nombre à cinq chiffres.

Soit “z” un nombre de cinq chiffres a,b,c,d,e et “s” la somme s = a + b + c + d + e.

$z = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10^1 + e \times 10^0$,

$z - s = a \times (10^4 - 1) + b \times (10^3 - 1) + c \times (10^2 - 1) + d \times (10^1 - 1) + e \times (10^0 - 1)$. Approfondissement : $z - s = a \times (10000 - 1000 + 1000 - 100 + 100 - 10 + 10 - 1) + b \times (1000 - 100 + 100 - 10 + 10 - 1) + c \times (100 - 10 + 10 - 1) + d \times (10 - 1) + e \times (1 - 1)$. Dans chaque cas nous obtenons une suite de 10 - 1 (exemple : $10000 - 1000 = (10-1) \times 1000$), avec le dernier chiffre qui s'autoannule et une opération (sans division) composée uniquement de multiples d'un même nombre, qui donne toujours un multiple de ce nombre — en l'occurrence, 9.

deuxième étape : cas d'un nombre quelconque.

La dernière partie de la première étape peut être généralisée. Il suffit d'ajouter des puissances et de compléter la généralisation. Par exemple :

$y \times 10^{10} - y = y \times (1000000000 - 1000000000 + 1000000000 -100000000 + 100000000 - 100000000 + 100000000 - 1000000 + 1000000 - 100000 + 100000 - 10000 + 10000 - 1000 + 1000 - 100 + 100 - 10 + 10 - 1)$ et on peut suivre ce qui a été dit précédemment.

$(a^2 + b^2)$ est toujours égal à $(a \times b \times 2 + (a - b)^2)$

exemple :

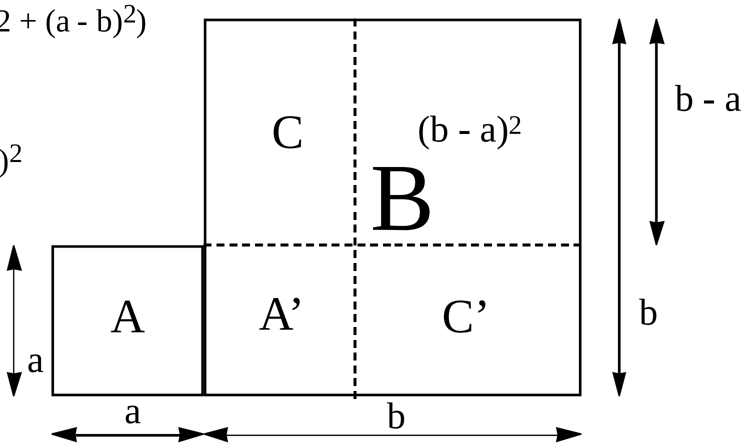
$(3^2 + 4^2) = 25$; $25 = 3 \times 4 \times 2 + (3 - 4)^2$

démonstration :

Aire de A + B = $(a^2 + b^2)$

ou

Aire de A + B = $(a \times b \times 2 + (a - b)^2)$



A est un carré de côté a.
B est un carré de côté b.

On reporte A dans B sous le nom de A’. On prend un côté de A’ non commun à B et on l'allonge sur toute la longueur de b ; on fait la même chose avec l'autre côté de A’ non commun à B.

Par hasard, nous avons cru remarquer, mais pas encore démontré, que les multiples des nombres qui sont constitués entièrement de uns (par ex. 111) pouvaient être repérés par une petite méthode :

— Soit “x” un nombre quelconque, “y” un nombre constitué seulement de 1, “z” le nombre de 1 de “y” ;

— Pour savoir si “x” peut être divisé par “y”, il faut faire “z” paquets (en additionnant les nombres entre eux tous les “z” chiffres) et toutes les dizaines vont, en unité, à la colonne suivant la leur ;

— si tous les paquets sont égaux, alors “x” est divisible par “y”.

Exemple :
“x” = 23541589 ; “y” = 111 ; (“z”=3).

```
paquet 1 : 9+1+3=13     4
paquet 2 : 8+4+2=14     5
paquet 3 :   5+5=10     1
```

23541589 n'est pas divisible par 111.