dénombrements

par Anne NGUYEN et Elise SAUNIER (2nde)
Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris

Nous nous sommes proposé de trouver une formule permettant d'obtenir le nombre de combinaisons au

LOTO

et autres jeux où l'ordre des tirages n'a pas d'importance. Pour y parvenir, nous avons fait un tableau :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		1	3	6	10	15	21	28	36	45
3			1	4	10	20	35	56	84	120
4				1	5	15	35	70	126	210
5					1	6	21	56	126	252
6						1	7	28	84	210
7							1	8	36	120
8								1	9	45
9									1	10
10										1

Ce tableau représente horizontalement le nombre de numéros dans l'urne et verticalement le nombre de numéros sortants, l'intersection des deux étant le nombre de combinaisons. De ce tableau, nous avons obtenu un second tableau. Ce second tableau nous montre les rapports entre les numéros de l'urne et les numéros sortants. Le rapport établi est le suivant : pour tout nombre X représentant un nombre de combinaisons (pour “U” numéros dans l'urne et “T” numéros sortants) ; et Y représentant un nombre de combinaisons (pour “U” numéros dans l'urne et “T+1” numéros sortants), on a X + Y nombre de combinaisons (pour “U+1” numéros dans l'urne et “T+1” numéros sortants).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		1	2 +1	3 +3	4 +6	5 +10	6 +15	7 +21	8 +28	9 +36
3			1	3 +1	6 +4	10 +10	15 +20	21 +35	28 +56	36 +84
4				1	4 +1	10 +5	20 +15	35 +35	56 +70	84 +126
5					1	5 +1	15 +6	35 +21	70 +56	126 +126
6						1	6 +1	21 +7	56 +28	126 +84
7							1	7 +1	28 +8	84 +36
8								1	8 +1	36 +9
9									1	9 +1
10										1

Pour tout nombre X représentant le nombre de numéros dans l'urne et 1 le nombre de tirages ; on a X combinaisons. On ne peut avoir un nombre de tirages plus grand que le nombre de numéros dans l'urne. Si l'on a X numéros dans l'urne et X numéros sortants, alors on a 1 combinaison. Pour X numéros dans l'urne et X–1 numéros sortants, on a X combinaisons.

A partir de là, un troisième tableau donnant une règle générale pour trouver un nombre de combinaisons s'est vu nécessaire.

1	n
2	$\dfrac{n \times (n-1)}{2}$
3	$\dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$
4	$\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24}$
5	$\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{120}$
6	$\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-5)}{720}$
7	$\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-6)}{5\,040}$
8	$\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-7)}{40\,320}$
9	$\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-8)}{362\,880}$
10	$\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-9)}{3\,628\,800}$

Soit N le nombre de numéros dans l'urne ; pour un tirage (comme nous l'avons déjà dit), on a N combinaisons ; pour deux tirages nous avons N facteur de (N-1), le tout divisé par 2 ; pour trois tirages nous avons N facteur de (N-1) facteur de (N-2), le tout divisé par 6, etc … Nous conclurons en disant que pour N nombres dans l'urne et S tirages, on a la formule suivante : N facteur de (N-1) … facteur de (N –(S – 1)) le tout divisé par S facteur de (S-1) facteur de (S-2) … facteur de (S-(S-1)).

Donc pour le LOTO on a N = 49 et S = 7 (avec le numéro complémentaire). Soit :

85 900 584 combinaisons.

Notre deuxième sujet est le *POKER* :

Le poker est un jeu de cartes qui se joue avec un jeu de 32 cartes. Chaque joueur reçoit 5 cartes qui forment une "main". Les "mains" sont plus ou moins bonnes suivant leur rareté ; une quinte-flush est plus difficile à obtenir qu'une paire. Voici le classement par ordre décroissant :

— la quinte-flush : 5 cartes identiques qui se suivent, et de la même couleur.

— le carré : 4 cartes identiques + 1 carte quelconque.

— la quinte : 5 cartes qui se suivent mais pas forcément de la même couleur.

— le full : 3 cartes de même valeur + 2 cartes de même valeur.

— le brelan : 3 cartes de même valeur + 2 cartes quelconques.

— la double paire : 2 cartes de la même valeur + 2 autres cartes de même valeur (pas la même), + 1 dernière carte quelconque.

— la paire : 2 cartes de même valeur + 3 cartes quelconques.

LE NOMBRE DE MAINS DE "PAIRE"

LA FORMULE :

$$\binom{4}{2}\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{1}\binom{\text{nb de cartes ds le jeu} - 4}{3}$$

$\binom{4}{2}$ se justifie car on choisit 2 cartes parmi 4 de même couleur. Elles n'ont pas la même couleur.

$\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{1}$ revient à multiplier par le nombre de chiffres différents dans le jeu. Ce calcul se justifie car on choisit 1 chiffre, duquel on va prendre 2 de ses 4 cartes pour faire la paire.

$\binom{\text{nb de cartes ds le jeu} - 4}{3}$ est l'opération permettant de choisir les trois dernières cartes de la main. On choisit ces 3 cartes dans le jeu - les 4 cartes de la valeur déjà utilisée car on ne peut retrouver les deux premières ni les deux autres car on obtiendrait un brelan ou un carré.

EXEMPLE POUR UN JEU DE 20 CARTES :

$$\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{20-4}{3} = 16\,800$$

L'opération peut également s'écrire :

$$\frac{4\times 3}{2}\times 5\times\frac{16\times 15\times 14}{3\times 2} = 16\,800$$

LE NOMBRE DE MAINS DE "DOUBLE-PAIRE"

LA FORMULE:

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{2}\binom{\text{nb de cartes ds le jeu} - 8}{1}$$

$\binom{4}{2}\binom{4}{2}$ correspond aux 2 cartes identiques à choisir parmi les 4 de la même couleur et cela deux fois car il y a deux paires.

$\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{2}$ correspond aux 2 nombres différents à choisir parmi le nombre de numéros dans le jeu pour former les deux paires.

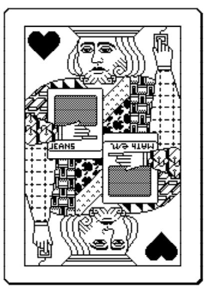
$\binom{\text{nb de cartes ds le jeu} - 8}{1}$ car on a déjà 4 cartes dans les mains et que l'on doit en avoir une de plus et qu'on la choisit parmi les cartes du jeu moins les cartes déjà tirées et moins les quatre autres de même couleurs.

EXEMPLE POUR UN JEU DE 20 CARTES :

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{20-8}{1} = 4\,320$$

l'opération peut également s'écrire :

$$\frac{4\times 3}{2}\times\frac{4\times 3}{2}\times\frac{5\times 4}{2}\times 12 = 4\,320$$



LE NOMBRE DE MAINS DE “BRELAN”

LA FORMULE:

$$\binom{4}{3}\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{1}\binom{\text{nb de cartes ds le jeu} - 4}{2}$$

$\binom{4}{3}$ correspond aux trois des quatres cartes qui sont choisies pour faire le brelan.

$\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{1}$ car on choisit un chiffre parmi tous ceux du jeu duquel on prendra trois de ses quatres cartes pour faire le brelan.

$\binom{\text{nb de cartes ds le jeu} - 4}{2}$ car il reste 2 cartes à choisir dans le jeu auquel on a déjà retiré les quatre cartes du chiffre formant le brelan.

EXEMPLE POUR UN JEU DE 20 CARTES : $\binom{4}{3}\binom{5}{1}\binom{20-4}{2} = 2\,400$

l'opération peut également s'écrire :

$$\frac{4\times 3\times 2}{3\times 2}\times 5\times\frac{16\times 15}{2} = 2\,400$$

LE NOMBRE DE MAINS DE “FULL”

LA FORMULE :

$$\binom{4}{3}\binom{\text{nb de chiff} \neq \text{ds le jeu}}{1}\binom{4}{2}\binom{\text{nb de chiff} \neq \text{ds le jeu} - 1}{1}$$

$\binom{4}{3}$ car on prend 3 cartes parmi 4 d'un même chiffre.

$\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{1}$ car on choisit le chiffre dont on va prendre 3 de ses 4 cartes pour faire le brelan.

$\binom{4}{2}$ car on prend 2 cartes parmi les 4 du chiffre servant à faire la paire.

$\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu} - 1}{1}$ car on choisit le chiffre duquel on prend 2 cartes pour faire la paire. Ce chiffre est choisi dans le jeu ; on a ôté un des chiffres du jeu car on en a déjà choisi un pour le brelan.

EXEMPLE POUR UN JEU DE 20 CARTES :

$$\binom{4}{3}\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 480$$

L'opération peut également s'écrire :

$$\frac{4\times 3\times 2}{3\times 2}\times 5\times\frac{4\times 3}{2}\times 5 = 480$$

LE NOMBRE DE MAINS DE “QUINTE”

LA FORMULE :

$\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu} - (5-1)}{1}\times 4^5$ car on doit trouver combien de suites de 5 cartes sont possibles dans le jeu, et pour chaque suite possible, il y a une couleur à choisir par carte.

> NDLR : Ici, et contrairement à la tradition, les quintes contiennent les quintes flush.

EXEMPLE POUR UN JEU DE 20 CARTES : $(5 - 5 + 1)\times 4^5 = 4^5$

LE NOMBRE DE MAINS DE “CARRE”

LA FORMULE :

$$\binom{4}{4}\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu}}{1}\binom{\text{nb de cartes ds le jeu} - 4}{1}$$

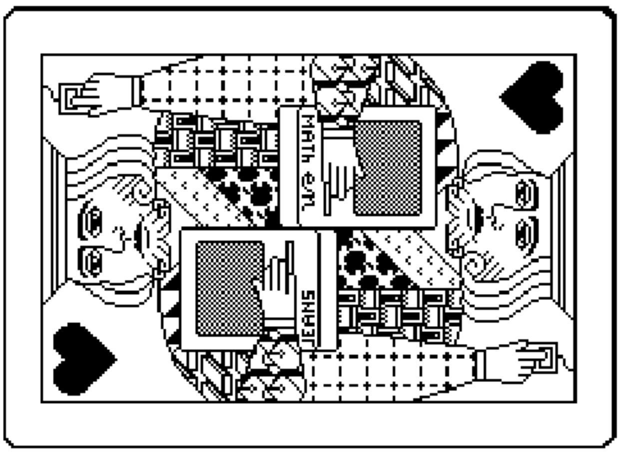
EXEMPLE POUR UN JEU DE 20 CARTES : $1\times 5\times 16 = 80$

LE NOMBRE DE MAINS DE “QUINTE-FLUSH”

LA FORMULE :

$$\binom{\text{nb de chiffres diff ds le jeu} - (5-1)}{1}\times 4$$

EXEMPLE POUR UN JEU DE 20 CARTES : $(5 - 5 + 1)\times 4 = 4$



> NB
> $\binom{4}{3}$ est une notation pour désigner le nombre de façons possibles pour choisir 3 éléments dans un ensemble de 4 éléments.