Lycée A. Maillol
Année 2011-2012

Qui peut gagner des millions ?

Fiona Denegre, Manon Esquirol, Laury Farines

Nous sommes trois élèves de 1ère Scientifique du lycée Aristide Maillol à Perpignan. Le projet MATh.en.JEANS a été conçu autour de plusieurs problèmes mathématiques parmi lesquels nous avons choisi : « Qui peut gagner des millions ? » Il s'agit d'un jeu télévisé qui consiste à choisir autant de nombres entiers entre 1 et 1000 que vous le souhaitez, la seule contrainte étant que leur somme doit être exactement égale à 1000. Vous gagnez alors le montant, en euros, égal au produit de tous les nombres qui ont été sélectionnés. L'objectif est évidemment de gagner le plus d'argent possible. Nous avons essayé de trouver la combinaison qui fera gagner la plus grande somme d'argent. Nous avons choisi ce sujet car le contexte général nous paraissait réaliste. De plus qui n'a jamais rêvé de gagner une somme d'argent « astronomique» ?

1. Étude du cas 100

Pour faciliter nos calculs nous sommes parties sur une base de 100 au lieu de 1000. Les calculs sont alors faisables sur la calculatrice Nous avons ensuite fait des essais afin de nous orienter vers la solution, en prenant comme exemple :

- $2^{45} \times 10 \approx 3{,}518437209.10^{14}$
- $3^{30} \times 10 \approx 2{,}05891.10^{15}$
- $4^{20} \times 20 \approx 2{,}19902.10^{13}$

Nous constatons qu'en ajoutant des nombres entiers plus petits le résultat (produit) est plus important :

- $2^{49} \times 2 \approx 1{,}1259.10^{15}$
- $3^{32} \times 4 \approx 7{,}41208.10^{15}$

Pensant qu'en prenant une suite de nombres au hasard, ce serait long à tester, nous avons décidé de choisir des jetons ayant tous le même nombre. Nous l'avons calculé pour les chiffres de 1 à 5.

- 1 : 1×100 et $1^{100} = 1$
- 2 : 2×50 et $2^{50} \approx 1{,}1258199907 \times 10^{15}$
- 3 : $3 \times 33 + 1$ et $3^{33} \approx 5{,}559060567 \times 10^{15}$
- 4 : 4×25 et $4^{25} \approx 1{,}125899907 \times 10^{15}$
- 5 : 5×20 et $5^{20} \approx 9{,}536743164 \times 10^{13}$

On remarque sur ce petit échantillon que la meilleure combinaison est 3 pour 100. On constate qu'à partir de 3, le gain final est moindre.

2. Étude du cas 1000

Nous avons ensuite cherché une solution similaire pour 1000.

- $3 = 3 \times 333 + 1$ et $3^{333} \times 1 \approx 7{,}6099 \times 10^{158}$

Mais nous avons vu que nous pouvions encore améliorer le résultat car en multipliant le résultat par 1 nous perdons en gain. Nous avons trouvé que si nous remplacions le 1 du final par un 4 en modifiant la puissance le gain serait plus important.

- $3 = 3 \times 332 + 4$ et $3^{332} \times 4 \approx 1{,}0147 \times 10^{159}$

Justifications

Si un entier x supérieur ou égal à 5 apparaît dans la somme qui décompose 1000, alors il peut être lui-même décomposé (et remplacé) en une somme de plusieurs valeurs de 2 (ou 4) et 3, de sorte que le produit soit plus grand. Par exemple :

- $7 = 3 + 4$ et $3 \times 4 > 7$
- $6 = 3 + 3$ et $3 \times 3 > 6$
- $5 = 3 + 2$ et $3 \times 2 > 5$

Grâce à cela nous voyons qu'en prenant des grands chiffres nous minorons nos gains. Par exemple, il vaut mieux prendre la décomposition de 6 car à la fin nous gagnerons forcément plus.

De façon générale, si x est un nombre entier, $x \geq 5$ on peut écrire $x = 3n + p$ où $p = 0$, 1 ou 2. En effet, il suffit de faire la division euclidienne de x par 3 et le reste donne la valeur de p.

Nous allons alors procéder de la manière décrite ci-après. Dans la décomposition de 1000 en une somme d'entiers, si un tel jeton portant le nombre $x = 3n + p$ apparaît, alors pour augmenter le produit il faut le remplacer par :

- n jetons de 3 si x est un multiple de 3 (c'est-à-dire si $p = 0$) car $3^n \geq 3n$ dès lors que $n \geq 1$
- n jetons de 3 et un jeton de 2 si $p = 2$, car $3^n \times 2 \geq 3n+2$ dès lors que $n \geq 1$
- n - 1 jetons de 3 et un jeton de 4 (ou deux jetons de 2), si $x = 3n+1 = 3(n - 1) + 4$; en effet, on a $3^{n-1} \times 4 \geq 3(n-1) + 4$ dès lors que $n \geq 1$.

Par exemple:

- 50 divisé par 3 donne 16 et il reste 2 ; $50 = 3\times16 + 2$
  Nous prendrons donc 16 jetons de 3 et un de 2, et $3^{16} \times 2 \geq 50$

- 1000 divisé par 3 donne 333 et il reste 1. Cependant, pour améliorer notre résultat nous prendrons 332 jetons 3 et deux jetons 2 ; en effet, le résultat de la somme reste le même (cela fait mille), mais le gain, lui, est augmenté. Si on garde le résultat de départ, en multipliant par 1 on n'augmentera pas notre gain final.

En conclusion on peut penser que la méthode envisagée pour n = 100 et n = 1000 est valable quel que soit l'entier naturel n fixé.

Note de l'édition :
Les exemples qui terminent le texte ne justifient pas que cette décomposition soit la meilleure : on dit juste que le produit proposé est plus grand que le nombre non décomposé, mais pas plus grand que n'importe quelle décomposition. Il n'est jamais précisé non plus le statut du 4 : tout ce qui est démontré l'est pour des nombres plus grands que 5.